详细解答

STEP II 1993，第 2 题

纯数学 · 三角函数与代数函数的积分

STEP II 1993，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q2

关键思路

在第 (i) 部分，余弦的乘积不易积分，但和却很容易，所以我们用积化和差公式（factor formula）把乘积化为和。之后一切都取决于一个事实：除非 $k = 0$，否则 $\cos kx$ 在一个完整周期（period）上的积分为零。特殊情况正正就是 $m - n$ 或 $m + n$ 为零的情况。在第 (ii) 部分，我们把平方根内的式子合并成单一分数，再进行有理化（rationalise），从而把被积函数（integrand）拆成两个标准部分。

解答

第 (i) 部分

由积化和差公式 $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ 得

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)].$$

因此我们需要对整数 k 求 $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

这里用到 k 是整数，所以 $\sin 2k\pi = 0$。当 $k = 0$ 时不能除以 k，因此这个情况要分开处理。

? **想一想** 共有多少个不同的情况？它们会否重叠？

$k = m - n$ 和 $k = m + n$ 各自或为零，或不为零，而两者同时为零只会在 $m = n = 0$ 时发生。于是有三个情况：

- $m \neq n$ 且 $m \neq -n$，即 $|m| \neq |n|$：两个积分都等于零，答案是 0。
- $m-n$、$m+n$ 之中恰好有一个为零，即 $|m| = |n| \neq 0$：其中一项贡献 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$，另一项贡献 0，所以答案是 π。
- $m = n = 0$：两项各贡献 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$。（直接来看，被积函数就是 1。）答案是 2π。

总括而言，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

留意 $m = -n$ 与 $m = n$ 属于同一类，因为 cos 是偶函数（even function），$\cos(-nx) = \cos(nx)$。

第 (ii) 部分

被积函数 $\sqrt{1+1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$ 只在 $(x+1)/x \geq 0$ 时才是实数，即 $x > 0$ 或 $x \leq -1$。我们先处理 $x > 0$。

$x > 0$ 的情况。 把根号内的分子和分母同乘以 $x+1$：

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

其中利用了 $x+1 > 0$ 来取 $(x+1)^2$ 的平方根。现在把分子拆开，使其中一部分是 x^2+x 的导数的一半：

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

? **想一想** 怎样对 $1/\sqrt{x^2+x}$ 积分?

我们用配方法（completing the square）：$x^2+x = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$。然后标准结果 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$（在 $u > a > 0$ 时成立）可以应用，取 $u = x+\frac{1}{2}$ 和 $a = \frac{1}{2}$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right) + \text{常数} = \ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{常数}.$$

第一部分是 $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$。所以，当 $x > 0$ 时，

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

由于 $2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$，这也可以写成

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

用代换 (substitution) $x = \sinh^2 t$ 可以直接得出这第二个形式。被积函数变成 $2\cosh^2 t = 1 + \cosh 2t$，其积分为 $t + \sinh t \cosh t$。

$x \le -1$ 的情况。 这时 $x+1 \le 0$，所以 $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$，而

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

同样的拆法仍然适用，但现在 $x + \frac{1}{2} < 0$，所以我们需要 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|$，此式在 $|u| > a$ 时成立。当 $x < -1$ 时，

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left|2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

因为 $\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) = 1$，这个对数项也可以写成 $+\frac{1}{2}\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$。

验算

- 第 (i) 部分：取 $m = n = 1$，被积函数是 $\cos^2 x$，其平均值为 $\frac{1}{2}$，所以积分是 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$，与预期相符。对每一对 $-6 \le m, n \le 6$ 用数值方法（辛普森法则，Simpson's rule）计算，结果都与三个情况的公式吻合。
- 第 (ii) 部分：对答案求导。$\sqrt{x^2+x}$ 的导数是 $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$。$\frac{1}{2}\ln(\cdots)$ 的导数是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$。两者相加得 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$，正如所求。
- 数值上，$\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$，用辛普森法则和用公式 $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$ 计算，结果一致。

常见错误

- 忘记 $m = -n \neq 0$ 的情况；它与 $m = n \neq 0$ 一样，答案是 π。
- 在 $k = 0$ 时写出 $\dfrac{\sin kx}{k}$；这个情况需要另行处理。
- 没有检查正负号就写 $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$，这会令 $x < -1$ 时的答案出错。

STEP 之外

第 (i) 部分说明函数 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是正交 (orthogonal) 的。这正是傅里叶级数 (Fourier series) 背后的事实：若 $f(x) = \sum a_n \cos nx$，乘以 $\cos mx$ 再积分，就能

抽出单独一个系数 a_m。同样的想法，即以积分扮演点积（dot product）的角色，是函数空间上许多线性代数（linear algebra）内容的基础。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲解正交性，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则展示了傅里叶级数如何实际用于求解热方程（heat equation）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。