详细解答

STEP II 1993，第 15 题

概率与统计 · 中心极限定理

STEP II 1993，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q15

本题在 *Beyond STEP* 第 13.6 节累积起来的误差中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch13/errors-add-up.html

关键思路

总误差是许多微小而独立的误差之和，每个数各有一个。因此，先求出单独一个数的误差的平均值（mean）和方差（variance），再把所有数的结果加起来，然后利用中心极限定理（Central Limit Theorem）把总误差视为近似服从正态分布（normal distribution）。两部电脑之间的全部差别都来自平均值：一部机器的误差平均而言互相抵销，另一部的误差却全都偏向同一方。

解答

一个数的误差

设某数为 $a = m + U$，其中 $m = \lfloor a \rfloor$ 是整数，U 是它的小数部分（fractional part），且 $U \sim \mathrm{U}[0,1)$。我们把误差定义为（近似值）$-$（真实值）；正负号的约定并不影响误差的大小。

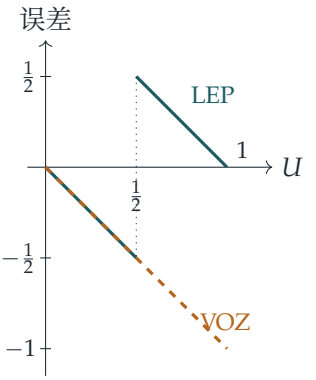
LEP（四舍五入，*rounding*）。若 $U < \frac{1}{2}$，该数会被换成 m，误差为 $-U$；若 $U \geq \frac{1}{2}$，该数会被换成 $m+1$，误差为 $1-U$。所以误差为

$$X = \begin{cases} -U, & 0 \leq U < \frac{1}{2}, \\ 1-U, & \frac{1}{2} \leq U < 1, \end{cases}$$

它以恒定的密度取 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 内的每一个值：X 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上服从均匀分布（uniform distri-

bution）（即图中的锯齿形）。

VOZ（截尾，*truncation*）。该数会被换成 m，所以误差为 $Y = -U$，在 $(-1, 0]$ 上服从均匀分布。



在长度为 1 的区间上的均匀分布，不论区间位于何处，方差都是 $\frac{1}{12}$。所以

$$\mathrm{E}(X) = 0, \quad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{1}{12}; \qquad \mathrm{E}(Y) = -\tfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \tfrac{1}{12}.$$

（顺带记下：$\mathrm{Var}(U) = \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$。）

把 1500 个数相加

答案的误差等于各个数的误差之和，因为电脑把近似值相加时是完全准确的。各个小数部分互相独立（independent），所以各个误差亦互相独立，它们的方差可以相加。对于 $n = 1500$ 个数，

$$\mathrm{Var}(\text{总误差}) = \frac{1500}{12} = 125, \qquad \text{标准差} \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.18.$$

根据中心极限定理，1500 个独立同分布（independent, identically distributed）的误差之和非常接近正态分布。

LEP。总误差 E_L 近似服从 $\mathrm{N}(0, 125)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|E_L| > 15) &\approx \mathrm{P}\left(|Z| > \frac{15}{\sqrt{125}}\right) = \mathrm{P}(|Z| > 1.342) \\ &= 2\big(1 - \Phi(1.342)\big) \approx 2(1 - 0.9102) \approx 0.18.\end{aligned}$$

这里毋须作连续性校正（continuity correction）：这些误差是连续随机变量（continuous random variable），而不是整数。

VOZ。总误差 E_V 近似服从 $\mathrm{N}(-750, 125)$。只有当 $E_V \geq -15$ 时，误差的大小才不超过 15，而这个值比平均值高出

$$\frac{-15 - (-750)}{\sqrt{125}} = \frac{735}{11.18} \approx 66$$

个标准差（standard deviation）。这个概率完全可以忽略不计，所以

$$\mathrm{P}(|E_V| > 15) \approx 1.$$

截尾永远向下偏，平均每次偏 $\frac{1}{2}$，所以加了 1500 个数之后，VOZ 的答案大约相差 750。

想一想 两部机器所产生的误差方差相同。为甚么答案却相差这么远?

总误差的离散程度是一样的，大约是 ± 11，但它的中心却不一样。LEP 的误差以 0 为中心，所以总误差在 0 附近徘徊。VOZ 的误差平均值全都是 $-\frac{1}{2}$，所以偏差（bias）与 n 成正比地增长，而随机的离散程度只按 $\sqrt{n}$ 的速度增长。偏差轻易胜出。

LEP 可以做多少次加法?

假设 LEP 把 n 个数相加。它的总误差近似服从 $\mathrm{N}\left(0, \frac{n}{12}\right)$，而我们需要

$$\mathrm{P}(|E_L| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \;\geq\; 0.9 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95.$$

由于 Φ 是递增函数，而且 $\Phi(1.6449) = 0.95$，上式即

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.6449 \iff n \leq 12\left(\frac{10}{1.6449}\right)^2 \approx 443.5.$$

这个概率随 n 增加而下降，所以当 $n \leq 443$ 时它仍然不小于 0.9，到 $n = 444$ 时才首次跌破 0.9。因此 LEP 可以把 **443** 个数相加。（如果你把一次“加法”理解为使用一次 $+$ 号，那么把 443 个数相加需要用 442 次；只要说明你采用哪一种理解，两种都可以接受。）

验算

- 1.342 这个数值合理吗？总误差 15 比一个标准差（11.18）略多，而正态分布中约有 18% 的部分距离平均值超过 1.34 个标准差。这大致吻合。
- 数值检验。模拟 10^5 批、每批 1500 个四舍五入后的数，得出 $\mathrm{P}(|E_L| > 15) \approx 0.179$。按均匀分布之和的精确分布计算得 0.1797，而正态近似所得的亦是 0.1797。至于第二部分，精确概率在 $n = 443$ 时为 0.90019，在 $n = 444$ 时为 0.89981，印证了这个分界点。

常见错误

- 把 LEP 的误差当作在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布：四舍五入可以向上或向下，所以误差是在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布。

- 忘记 VOZ 每个数的误差平均值是 $-\frac{1}{2}$，因而得出与 LEP 相同的答案。
- 在最后一部分用了 $\Phi(z) = 0.9$ 而不是 0.95：事件 $|E| < 10$ 是双侧的，所以每边尾部各占 0.05。

STEP 之外

这是浮点运算（floating-point arithmetic）中舍入误差（rounding error）的经典分析：无偏的舍入法令累积误差按 $\sqrt{n}$ 的速度增长，而有偏的规则则令它按 n 的速度增长。这正是 IEEE 754 标准采用“逢半取偶”（round half to even）而不是逢半必进的原因。n 个均匀分布随机变量之和有一个精确的分布（Irwin–Hall 分布），观察它变成正态分布的速度有多快，是认识中心极限定理的一个好途径；Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）证明了这条定理，并对它加以讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。