详细解答

STEP II 1993，第 14 题

力学 · 反弹与恢复系数

STEP II 1993，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q14

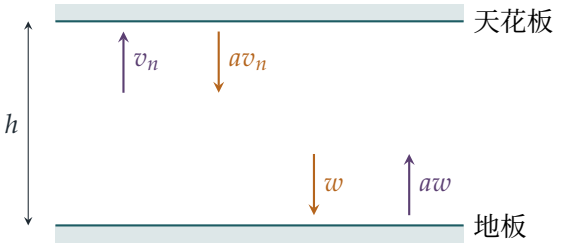
关键思路

在两次碰撞之间，球只受重力作用而自由运动，因此 $v^2 = u^2 \pm 2gh$ 把它在地板和天花板处的速率联系起来，而每次碰撞都把速率乘以 a。追踪一个完整循环（天花板、地板、再回到天花板），便得到球在天花板处的动能（kinetic energy）所满足的线性递推关系（linear recurrence），我们把它平移到不动点（fixed point）来求解。球能第 n 次到达天花板，当且仅当该能量为正数，再取对数便得出所求的上界。

解答

我们把球视为沿铅垂方向运动的质点，不计空气阻力，并取 $0 < a < 1$（上界的分母含有 $\ln a$，而且若 $a = 1$，球会永远不停地撞击天花板）。设 v_n 为球第 n 次撞击天花板前一刻的速率，并设

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{于是} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$



第一次撞击天花板

球离开地板时 $u^2 = 2kgh$，并克服重力上升高度 h，所以

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

由于 $k > 1$，这是正数；因此球必定至少到达天花板一次。

一个完整循环

第 n 次撞击天花板后的一刻，球以速率 av_n 向下运动（对固定的天花板应用牛顿实验定律（Newton's experimental law））。它下落高度 h，因此以速率 w 到达地板，其中

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

它以速率 aw 向上反弹，并上升高度 h。若它能回到天花板，它在该处的速率满足

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

除以 $2gh$，得

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

只要右边为正数，此式便成立；若右边为零或负数，球便再也回不到天花板。

> **想一想** 形如 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 的递推关系应怎样求解?

先找出满足 $E = a^4 E + (a^2 - 1)$ 的常数解 E：

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

减去这个不动点便可消去常数项：设 $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$，则 $F_{n+1} = a^4 F_n$。因此 $F_n = a^{4(n-1)} F_1$，而由于 $F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$，

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

乘以 mgh，可知第 n 次撞击天花板前一刻的动能为

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

正如所求。

撞击天花板的次数

球只有在到达天花板时速率为正，才会第 n 次撞击天花板，即必须有 $E_n > 0$。（若球第 n 次撞击天花板，则之前每一次它也都撞击了天花板，所以上面的公式适用。）把 $E_n > 0$ 乘以 $a^2+1>0$，

$$a^{4n-4}((k-1)(a^2+1)+1) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{4n-4}(a^2(k-1)+k) > 1.$$

两边皆为正数，所以可以取对数：

$$(4n-4)\ln a + \ln[a^2(k-1)+k] > 0.$$

> ? **想一想** 除以 $4\ln a$ 时，不等号的方向应怎样?

由于 $0<a<1$，我们有 $\ln a < 0$，所以除以 $4\ln a$ 时不等号要反转：

$$n-1 < -\frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}, \qquad \text{即} \qquad n < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

因此，若球撞击天花板 N 次，则不等式在 $n=N$ 时成立，于是

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

特别地，撞击天花板的次数不会超过这个值，这正是我们要证明的。（事实上 E_n 随 n 递减，所以 N 恰好等于严格小于该上界的正整数的个数。）

验算

- $n=1$: 公式给出 $mgh(k-1)$, 与由能量守恒(energy conservation)得出的 $\frac{1}{2}m(2kgh)-mgh$ 吻合。
- n 很大时：$E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$，所以球最终确实无法再到达天花板；既然每次碰撞都损失能量，结果必然如此。
- 数值验算：取 $k=6$、$a=0.9$、$h=2\,\mathrm{m}$、$m=1\,\mathrm{kg}$ 及 $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，逐步模拟得出在天花板处的动能依次为 98、60.57、36.02 J，与公式相符。球撞击天花板 6 次，而上界约为 6.48。

常见错误

- 忘记速率在天花板和地板两处都要乘以 a，结果每个循环得出 a^2 而非 a^4。
- 除以 $\ln a$ 时没有把不等号反转。
- 把恢复系数（restitution）用在动能而非速率上：每次碰撞时能量是乘以 a^2，而不是乘以 a。

STEP 之外

递推关系 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 是一阶线性差分方程（first-order linear difference equation）。减去不动点这个技巧，正是为线性常微分方程（ODE）求特别积分（particular integral）的离散版本，它在迭代映射（iterated maps）及其稳定性的研究中会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对碰撞和能量损失有更一般的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。