详细解答

STEP II 1993，第 13 题

力学 · 简谐运动

STEP II 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q13

关键思路

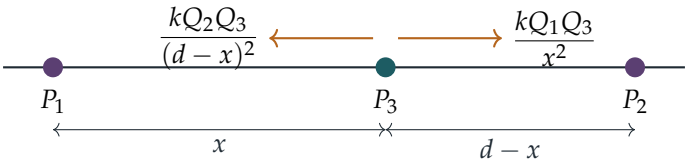
为运动中的小珠设置坐标，写出它所受的净力（net force）：两个方向相反的平方反比（inverse-square）斥力。两力互相抵销之处就是平衡位置（equilibrium position）。至于振动，令小珠偏离平衡位置一个微小的 y，对两个力都使用题目给出的近似式，常数项便会因平衡条件而互相抵销，只剩下一个与 y 成正比的回复力（restoring force）。这正是简谐运动（simple harmonic motion）的方程。

（题目说 P_3 在“P_1 与 P_3 之间”移动；这是试卷的笔误，应为“P_1 与 P_2 之间”。）

解答

模型。各小珠均视为质点（particle）；金属线光滑且水平，所以 P_3 的重量与法向反作用力（normal reaction）都垂直于金属线，对沿线的运动毫无影响。沿金属线方向的力，就只有作用于 P_3 的两个电斥力（固定的小珠已被固定在原位，所以毋须理会它们所受的力）。

由 P_1 起向 P_2 方向量度 x，于是 P_3 与 P_1 的距离为 x，与 P_2 的距离为 $d-x$，其中 $0<x<d$。



P_1 把 P_3 推向 P_2（正方向），而 P_2 则把它推回去，所以沿金属线应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

平衡位置

在平衡位置 $x = a$，$(*)$ 的右边等于零。由于 k 和 Q_3 均为正数，可以两边除以 kQ_3：

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a 和 $d-a$ 都是正数（小珠位于两颗固定小珠之间），所以取正平方根：

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

这正是所要求的结果。为方便起见，记 $S = \sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}$ 及 $b = d-a$，于是

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

留意小珠停在较接近*较弱*电荷的一边，这是合理的。

微小振动

设 $x = a + y$，其中 y 很小，于是 $d - x = b - y$ 而 $\ddot{x} = \ddot{y}$。利用题目给出的近似式（以及把 y 换成 $-y$、a 换成 b 后的同一近似式），

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

代入 $(*)$：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

> **想一想** 不含 y 的各项会怎样？

它们正好就是平衡条件，所以 $\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$，这些项互相抵销。在平衡位置附近展开时，这种情况必然出现：按定义，零阶的力就是零。

现在利用 a 和 b 的表达式化简 y 的系数：

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1 S^3}{d^3 Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

所以

$$\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3}\cdot\frac{\sqrt{Q_2}+\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1Q_2}} = \frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1Q_2}}.$$

因此

$$\ddot{y} \approx -\omega^2 y, \qquad \omega^2 = \frac{2kQ_3S^4}{md^3\sqrt{Q_1Q_2}} > 0.$$

这就是简谐运动的方程，所以在位移很小时，P_3 围绕 $x = a$ 作近似的简谐运动。（若在 $y = y_0$ 处由静止释放，其运动为 $y \approx y_0 \cos \omega t$。）周期（period）为

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3S^4}} = \frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}} \\ &= \frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}} = \frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1Q_2}}{kQ_3}}, \end{aligned}$$

这就是所要求的结果。

验算

- **对称性：**当 $Q_1 = Q_2$ 时，得 $a = d/2$，即中点，理应如此。周期公式对 Q_1 和 Q_2 是对称的，这也是应有的性质（对调两个电荷只是把整幅图反射过来）。
- **量纲（dimensions）：**kQQ'/r^2 是力，所以 $kQ_3\sqrt{Q_1Q_2}$ 的量纲是力 $\times$ 长度^2。于是 $md\sqrt{Q_1Q_2}/(kQ_3)\cdot d^2/(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^4$ 的量纲为 质量 $\times$ 长度/力 $=$ 时间^2。没有问题。
- **数值：**取 $Q_1 = 4$、$Q_2 = 1$、$d = 3$ 及 $k = Q_3 = m = 1$，得 $a = 2$（验证：$4/2^2 = 1/1^2$）及 $T = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3.628$。对多组随机选取的常数，由一个极小的位移出发以数值方法对 $(*)$ 积分，所得周期与公式吻合，误差小于 10^4 分之一。

常见错误

- 只展开两个力的其中一个：两个力都取决于 y，而且两者都对回复力有贡献（符号相同）。
- 弄错 $1/(b-y)^2$ 中 y 项的符号：在题目给出的近似式中把 y 换成 $-y$，得到的是 $+2y/b^3$。
- 在平衡条件中取负平方根，这样小珠便会落在线段 P_1P_2 之外。

STEP 之外

我们所做的就是线性化（linearisation）：在势能（potential）$V(x)$ 的稳定平衡点附近，运动近似为简谐运动，其中 $\omega^2 = V''(a)/m$。这里 $V = kQ_3\big(Q_1/x + Q_2/(d-x)\big)$，你可以验证 $V''(a)$ 给出相同的 ω^2。把这个想法推广到多个坐标，就会引出振动的简正模式（normal modes），那是大学一年级动力学的核心课题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对平衡点附近的微小振动有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。