详细解答

STEP II 1993，第 12 题

力学 · 摩擦力与刚体

STEP II 1993，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q12

关键思路

球体被卡在墙与斜面之间，所以它一旦移开，就必定与其中一方失去接触。如果它在两个接触点同时滑动，球心便保持不动，球体只是绕着球心自转。弄清楚它会向哪个方向转动，就知道每个摩擦力（friction）的方向。之后只需处理三条方程（两条分解力的方程和一条力矩方程），未知数为 N_1、N_2 和 m。至于第二部分，只要选对取力矩的点，一行就能得出答案。

解答

模型与摩擦力的方向

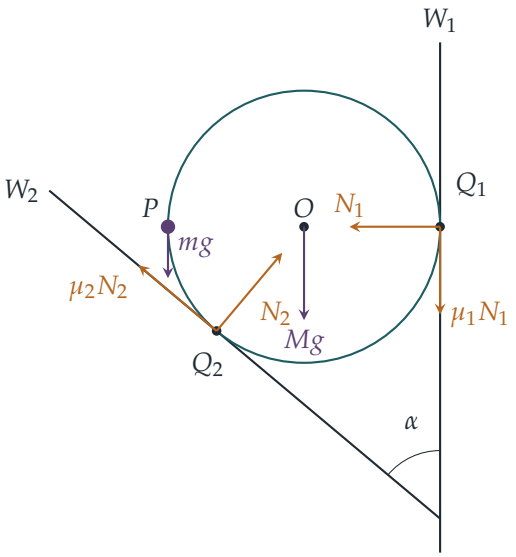
我们把球体视为均匀的刚体（rigid body）球，把质点（particle）视为固定在 P 的点质量。Q_1 和 Q_2 两处的接触面都是粗糙的。设法向反作用力（normal reaction）为 N_1（水平，指离墙壁）和 N_2（垂直于斜面，通过球心 O）。

由于 PQ_1 是水平直径，质点位于与 O 水平距离为 r 之处，在远离墙壁的一侧。因此它的重量对 O 的力矩（moment）为 mgr，使球体朝 P 下降的方向转动，而接触点上的力必须与之平衡。

? **想一想** 每个接触点上的摩擦力朝哪个方向?

如果球体在两点都滑动，它仍与两个面保持接触，所以 O 固定不动，球体绕 O 朝 P 下降的方向转动。于是与 P 相对的点 Q_1 沿墙壁向上移动，而 Q_2 则沿斜面向下移向墙角。摩擦力阻碍滑动，所以在 Q_1 处沿墙壁向下，在 Q_2 处沿斜面向上。由于两点都即将滑动，两处的摩擦力都达到极限（limiting）：$F_1 = \mu_1 N_1$ 和 $F_2 = \mu_2 N_2$。两个摩擦力对 O 的力

矩都与质点的力矩相反，这正是应有的情况。



两个接触点同时滑动

斜面与铅垂线成角 α，所以它的法线与水平线成角 α。于是 N_2 的分量为指向墙壁的 $N_2\cos\alpha$ 和向上的 $N_2\sin\alpha$，而沿斜面向上的摩擦力 $\mu_2 N_2$ 的分量为指离墙壁的 $\mu_2 N_2\sin\alpha$ 和向上的 $\mu_2 N_2\cos\alpha$。

沿水平方向分解：

$$N_1 = N_2\cos\alpha - \mu_2 N_2\sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha). \tag{1}$$

沿铅垂方向分解：

$$N_2\sin\alpha + \mu_2 N_2\cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

对 O 取力矩：两个法向反作用力都通过 O，Mg 也是。两个摩擦力沿切线作用，与 O 的距离为 r。所以

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad\Longrightarrow\quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

把 (1) 代入 (3) 和 (2)：

$$mg = N_2(\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha),$$
$$(M+m)g = N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - \mu_1\cos\alpha + \mu_1\mu_2\sin\alpha).$$

从第二式减去第一式，得

$$\begin{aligned} Mg &= N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2) \\ &= N_2((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2). \end{aligned}$$

把 mg 的方程除以这条方程，N_2 和 g 便会约去：

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2}\,M,$$

这正是所要求的结果。

要令这个结果在物理上有意义，我们需要 $N_1 > 0$，由 (1) 可知这即是 $\mu_2 < \cot\alpha$。如果 μ_2 比这个值大，Q_2 处的摩擦力会把球体拉离墙壁，那就是最后一部分的情况。

绕 Q_2 滚动

现在球体在 Q_2 处不滑动，而是即将绕 Q_2 转动（沿斜面向上滚动），所以球心会远离墙壁，Q_1 处的接触即将消失。在即将滚动的一刻，$N_1 = 0$，因此 Q_1 处的摩擦力也是零。

> ? **想一想** Q_2 处的摩擦力现在是未知的，我们该怎样处理?

我们对 Q_2 取力矩，这样 Q_2 处的反作用力和摩擦力都会消失，只剩下两个重量。从 Q_2 起量度水平距离。由于 OQ_2 垂直于斜面，它与水平线成角 α，所以 O 与 Q_2 的水平距离为 $r\cos\alpha$，在靠墙的一侧。质点在 O 之外再远 r，朝远离墙壁的方向，所以它与 Q_2 的水平距离为 $r - r\cos\alpha$，在另一侧。要令力矩平衡，

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

其中最后一步是把分子和分母同除以 $\cos\alpha$。这就是所求的结果。

验算

- 在两种情况的分界上，即 $N_1 = 0$，亦即 $\mu_2 = \cot\alpha$ 时，两个答案应该一致。把 $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$ 代入第一条公式，不论 μ_1 是甚么，分子都变成 $\cot\alpha$，分母都变成 $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$。所以 $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$，与第二个答案吻合。
- 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，第二个答案给出 $m = M$。当 $\alpha = 60^\circ$、$\mu_1 = 0.2$、$\mu_2 = 0.3$ 和 $M = 1$ 时，第一个答案给出 $m \approx 0.561$。我们用电脑就这些数值以及 2000 个随机个案，检查过力和力矩的平衡。
- 如果两个接触面都是光滑的（$\mu_1 = \mu_2 = 0$），第一条公式给出 $m = 0$：没有任何东西能抵抗质点的力矩，一如所料。

常见错误

- 弄错摩擦力的方向。先判断球体会怎样转动，再判断每个接触点会向哪个方向滑动。

- 忘记两个反作用力都通过球心，所以它们不会出现在对 O 的力矩方程中。
- 在最后一部分仍保留墙壁的摩擦力。球体一旦即将离开墙壁，$N_1 = 0$，所以该处的摩擦力是零。

STEP 之外

这类题目涉及多个可能滑动或滚动的接触点，是带约束（constraints）的刚体力学的起点。每个接触点都给出一组不等式（$|F| \le \mu N$、$N \ge 0$），而你要找出其中哪些是以等式成立的。同样的分情况讨论也出现在机械人学（robotics）中，用来判断机械手能否抓稳物件。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对静力学（statics）和刚体的转动有细致的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。