详细解答

STEP II 1993，第 11 题

力学 · 有二次阻力的运动

STEP II 1993，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

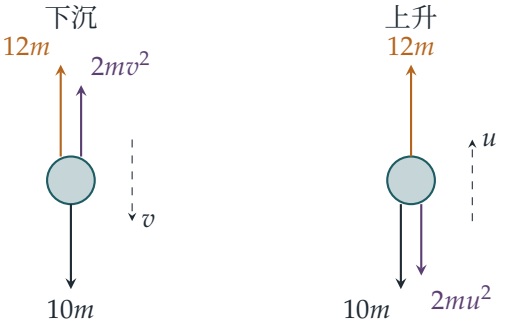
step.maths.org/questions/93-s2-q11

关键思路

物体一旦进入液体,浮力(buoyancy)便大于重力,因此除了与 v^2 成正比的阻力(resistance)之外，还有一个恒定的向上净力。阻力永远与运动方向相反，所以物体掉头时阻力的方向亦随之反转，下沉和上升两个阶段须各自列出运动方程（equation of motion）。两条方程都可以干净利落地分离变量。求时间时用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，求距离时用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

解答

我们把物体模拟为一个质点（particle）。在液体中，物体的重量为 $10m$ N，方向向下，而浮力为 $\frac{6}{5}\times 10m = 12m$ N，方向向上，故两者合起来是 $2m$ N 的净力，方向向上，不论物体向哪个方向运动都是如此。阻力 $2mv^2$ N 的方向则与速度相反。



下沉阶段

取向下为正，设 x 为液面以下的深度，v 为向下的速率。由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

设物体以速率 $V > 0$ 进入液体。分离变量（separating the variables），并由入水一刻（$t = 0$，$v = V$）积分至停止下沉的一刻（$t = T_1$，$v = 0$）：

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

由于对任何有限的 V 都有 $\arctan V < \frac{\pi}{2}$，故 $T_1 < \frac{1}{4}\pi$：无论物体入水时有多快，它都会在入水后不足 $\frac{1}{4}\pi$ 秒内停止下沉。（此外，整个过程中 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$，所以它必定会停下来。）

$V = 1$ 时到达的深度

此时 $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$。要求深度，可把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

所以 $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$，最大深度为

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ 米},$$

正如题目所求。

上升阶段

在深度 D 处，物体瞬时静止，但 $2m$ N 的向上净力依然存在，所以物体开始上升。这时阻力的方向向下。取向上为正，设 y 为由最低点起计上升的高度，u 为向上的速率：

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

想一想 为甚么不能沿用下沉阶段的方程，只让 v 变成负数？

不论 v 的正负，$-2mv^2$ 这一项永远指向上方。物体一旦上升，阻力必须指向下方，所以方程也要改变。（若要用单一条方程，便须写成 $-2mv|v|$。）还要留意，整个上升过程中 $u < 1$：u 由 0 开始，而只有当 $u < 1$ 时才有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$，所以 u 只能趋近终端速率（terminal speed）1 ms^{-1}。这保证了下文的 $1-u^2$ 为正数。

回到液面时的速率。利用 $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$，由 $y = 0$，$u = 0$ 积分至 $y = D$，$u = U$：

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

所以 $1-U^2=\frac{1}{2}$，物体回到液面时的速率为 $U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ms}^{-1}$。

上升所需时间。利用 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2(1-u^2)$，并以部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)$ 处理：

$$T_2=\frac{1}{2}\int_0^U\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{4}\left[\ln\frac{1+u}{1-u}\right]_0^U=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

最后一步是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}$。

总时间。物体在进入水池后

$$T_1+T_2=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\ \text{秒}$$

再次到达液面，正如题目所求。

验算

- 由于 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$，上升时间为 $T_2=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.4407\,\mathrm{s}$，总时间 $\approx 0.3927+0.4407=0.8334\,\mathrm{s}$。
- 以数值方法逐步计算这个运动（龙格－库塔法（Runge–Kutta），阻力写成 $-2v|v|$），得出停止下沉的时间为 $0.39270\,\mathrm{s}$，深度为 $0.17329\,\mathrm{m}=\frac{1}{4}\ln 2$，回到液面的速率为 $0.70711\ \mathrm{ms}^{-1}$，回到液面的时间为 $0.83339\,\mathrm{s}$，全部吻合。
- 回到液面的速率小于入水速率，这是必然的：阻力在来回两段路程上都作负功。

常见错误

- 物体回升时仍把阻力当作向上，这样会得出 $2m+2mu^2$ 的向上净力，上升也会快得多。
- 忘记浮力大于重力，以致把净力（以向下为正）写成 $+2m$，而非 $-2m$。
- 求深度时用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，或求时间时用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，结果卡在积分上。

STEP 之外

二次阻力（quadratic drag）令运动方程变成非线性，但方程仍然是可分离变量的，这就是为何下沉时出现 arctan，而上升时出现 $\tanh^{-1}$（事实上 $T_2=\frac{1}{2}\tanh^{-1}U$）。上升时物

体趋近 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$ 的终端速率，此时阻力与向上净力互相平衡。大学一年级的课程会有系统地处理这类模型，包括像 $\dot{u} = 2(1 - u^2)$ 这类方程的相线（phase line）图像。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）讨论取决于速度的力，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则讨论可分离变量方程及自治方程（autonomous equations）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。