详细解答

STEP II 1993，第 10 题

纯数学 · 二次型与圆锥曲线

STEP II 1993，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q10

关键思路

一条关于 x 和 y 的二次方程之所以繁复，原因有二：一是 xy 交叉项（cross term），二是一次项。矩阵 $\mathbf{P}$ 处理前者，因为 $\mathbf{PAP}$ 是对角矩阵（diagonal matrix）。平移向量 $\mathbf{a}$ 处理后者：我们选取它，把原点移到圆锥曲线（conic）的中心，使所有关于 $\mathbf{x}_1$ 的一次项互相抵消。余下的就是纯粹的“平方和 = 常数”。

解答

对角化

首先，

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

这是对角矩阵，正如所求。另外留意 $\mathbf{P}$ 是对称（symmetric）矩阵，所以 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$。这一点稍后便会用到。

代入

设 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$。则 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$，而且

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

中间两项相等，因为它们各自都是 1×1 矩阵，所以等于自身的转置（transpose），而 $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$，这里用到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{P}$ 都是对称矩阵。此外 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$。于是方程变成

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11) = 0.$$

想一想 “一个合适的向量 $\mathbf{a}$”需要做到甚么？

目标方程 $3x_1^2 - y_1^2 = c$ 没有只含 x_1 或 y_1 的一次项，所以中间的括号必须为零。由于 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵，$2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$，所以我们需要

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

这里 $\det \mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$，所以恰好有一个解：

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} -75 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

（验算：$\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 - 8 \\ 8 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$。）

常数项

取这个 $\mathbf{a}$，便有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$，所以常数项是

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18 - 6) - 11 = -5.$$

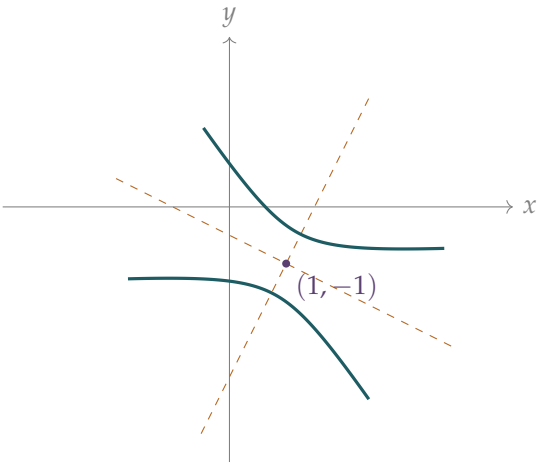
二次项是

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

所以方程变成 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$。两边除以 25，得

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{所以} c = \tfrac{1}{5}.$$

把代换逐项写出来，就是 $x = x_1 + 2y_1 + 1$，$y = 2x_1 - y_1 - 1$。原方程是 $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$，所以这条曲线是一条双曲线（hyperbola），中心在 $(1, -1)$。$\mathbf{P}$ 的两个列向量 $(1, 2)$ 和 $(2, -1)$ 互相垂直，所以它们给出双曲线的对称轴。



虚线是对称轴，方向分别为 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$。

想一想 为甚么 **P** 不是旋转（rotation）?

它的两个列向量互相垂直，但长度各为 $\sqrt{5}$，所以 $\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$，而不是 $\mathbf{I}$。这就是 **PAP** 的对角元素是 75 和 -25 的原因：它们是 **A** 的特征值（eigenvalue）15 和 -5 的 5 倍。这个比例因子在这里无关重要，因为它只是把二次部分乘以 5。

验算

- **A** 的迹（trace）和行列式（determinant）分别是 10 和 -75，所以它的特征值是 15 和 -5。这与 $75/5$ 和 $-25/5$ 吻合。
- 取 $x_1 = y_1 = 0$。则 $(x,y) = (1,-1)$，原方程左方为 $-1-16+11+18-6-11 = -5$，与 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$ 一致。
- 取 $x_1 = 1$，$y_1 = 1$。则 $(x,y) = (4,0)$，而 $-16+72-11 = 45 = 75-25-5$。

我们亦在 1000 个随机有理点上，精确地验证了恒等式 左方 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$。

常见错误

- 忘记交叉项 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ 相等，因而漏掉因子 2，得出 $\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{b}$。
- 停在 $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$ 便答 $c = 5$，没有把全式除到题目要求的形式。

STEP 之外

这是主轴定理（principal axes theorem）的缩影。每个实对称矩阵都可以用一个正交矩阵（orthogonal matrix）对角化（这里是 $\mathbf{P}/\sqrt{5}$）。所以每条圆锥曲线，以及三维空间中的每个二次曲面（quadric surface），都可以通过一次旋转（或反射）和一次平移化为标准形式。同样的想法亦可藉黑塞矩阵（Hessian matrix）为多元函数的驻点（stationary point）分类。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）有一章讲对称矩阵和正定性（positive definiteness），写得很好。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。