详细解答

STEP II 1993，第 1 题

纯数学 · 组合博弈策略

> **STEP II 1993，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q1

关键思路

一切都建基于一个计数上的事实。两位玩家都恰好有 9 可供分配，所以 Betty 不可能在每一块场地上都与 Adam 打和或胜过他，同时又在其中一块场地上明确取胜：那样她至少要用上 $9+1$。因此，每当 Betty 胜出，她必定是恰好赢两块场地而输掉第三块。掌握了这一点，第一部分就变成一套固定做法，而两个三元组的部分则变成简短的分情况讨论（case analysis）。

解答

全文中，“Betty 赢得场地 i”指 $b_i > a_i$，“Adam 赢得场地 i”指 $a_i > b_i$，而 $a_i = b_i$ 的场地则为打和。

一条引理：Betty 怎样才能胜出

设 Betty 的三元组（triple）击败 Adam 的三元组 (a_1, a_2, a_3)，其中 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$。

- 她不可能三块场地全赢,因为那样需要对每个 i 都有 $b_i \geq a_i + 1$,于是 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$。
- 假设她恰好赢一块场地。由于她的得分比 Adam 多，Adam 的得分是 0，所以其余两块场地不是打和就是 Betty 赢。于是对每个 i 都有 $b_i \geq a_i$，而且至少有一处是严格不等式（strict inequality），因此 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$。这是不可能的。

她的得分比 Adam 多，所以她至少得一分。因此她恰好赢两块场地。所以 Betty 击败 (a_1, a_2, a_3) 当且仅当（if and only if）对某一对场地 i, j 有

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

并且她输掉余下的场地 k。留意输掉场地 k 是自动成立的，因为 $b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$。

Betty 总能胜出

把场地重新编号，使得 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$。那么 $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$，所以 $a_1 \geq 3$。Betty 放弃 Adam 最强的那块场地，而在另外两块场地上各比他多一：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

这些都是非负整数（因为 $a_1 - 2 \geq 1$），而且和为 9。Betty 赢得场地 2 和场地 3，并输掉场地 1，因为 $a_1 - 2 < a_1$。她得 2 分而 Adam 得 1 分，所以她胜出。

Adam 可以确保自己永不胜出

取 $(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$。Adam 不可能在场地 2 或场地 3 上得分，因为 $b_2, b_3 \geq 0$。所以他最多得一分，而且只能靠赢得场地 1 来取得，这即是说 $b_1 \leq 8$。在这情况下 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$，所以 Betty 在场地 2 或场地 3 上有一个正数项，因而至少得一分。要么 Adam 得 0 分，要么他得 1 分而 Betty 至少得 1 分。无论哪种情况，他的得分都不会多于 Betty，所以不论 Betty 怎样做，他都永不胜出。

（以穷举搜索（brute-force search）可知，$(9, 0, 0)$ 及其各种重新排列是具有这个性质的仅有三元组。面对任何其他三元组，Betty 只要作出某个愚蠢的选择，就会把胜利拱手让给 Adam。）

两个三元组：$(5, 3, 1)$ 和 $(3, 1, 5)$

我们需要证明没有任何三元组 (b_1, b_2, b_3) 能同时击败这两者。根据引理，Betty 面对每个三元组都需要赢两块场地。

对 $(5, 3, 1)$。赢得场地 1 和场地 2 要用上 $6 + 4 = 10 > 9$，这是不可能的。所以她必须赢得场地 3，再加上场地 1 或场地 2：

$$b_3 \geq 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{或}\ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

对 $(3, 1, 5)$。赢得场地 1 和场地 3 要用上 $4 + 6 = 10 > 9$，这是不可能的。所以她必须赢得场地 2，再加上场地 1 或场地 3：

$$b_2 \geq 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \geq 4 \ \text{或}\ b_3 \geq 6). \tag{B}$$

想一想 两个条件都涉及场地的选择。我们怎样把它们合并起来而不遗漏任何情况？

按 (B) 中的第二个选择分情况讨论。

- 若 $b_3 \geq 6$，则 $b_1 + b_2 \leq 3$，所以 $b_1 \geq 6$ 和 $b_2 \geq 4$ 都不可能成立，这与 (A) 矛盾。
- 若 $b_1 \geq 4$，则连同 (B) 中的 $b_2 \geq 2$ 和 (A) 中的 $b_3 \geq 2$，再加上 (A) 中的二择其一，可得

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 2 + 2 = 10 \qquad \text{或} \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 + 4 + 2 = 10.$$

  两者都不可能，因为总和是 9。

每种情况都导致矛盾，所以没有单一个三元组能同时击败 $(5,3,1)$ 和 $(3,1,5)$。Adam 凭这一对三元组胜出，正如所求。

验算

总共只有 $\binom{11}{2} = 55$ 个三元组，所以一切都可以用穷举法检查。电脑证实，Adam 的 55 个三元组每一个都被 Betty 上述的做法击败，而且每一个致胜的回应都恰好赢两块场地。电脑亦列出击败 $(5,3,1)$ 的 13 个三元组和击败 $(3,1,5)$ 的 13 个三元组，并发现两张清单没有共同的三元组。举一个具体例子，$(4,2,3)$ 以 2–1 击败 $(3,1,5)$，但面对 $(5,3,1)$ 时它只赢得场地 3，并输掉场地 1 和场地 2，所以它以 1–2 落败。

常见错误

- 以 $(3,3,3)$ 作为 Adam “永不胜出”的三元组。Betty 可以出 $(2,2,5)$ 而以 1–2 落败，所以 Adam 凭它是可以胜出的。
- 忘记了 Betty 若只赢一块场地而胜出，就需要 Adam 一分不得，继而没有利用总和 9 来排除这个情况。
- 在两个三元组的部分，只检查几个自然想到的回应，例如 $(6,0,3)$ 或 $(0,2,7)$，而没有证明任何回应都行不通。

STEP 之外

布洛托上校博弈（Colonel Blotto）是博弈论（game theory）中的经典。由于 Betty 后行并掌握全部信息，她总能胜出，所以有趣的版本是让两位玩家同时行动。这时通常没有最佳的纯策略（pure strategy），而解答是一个混合策略（mixed strategy）：三元组上的一个概率分布（probability distribution），其存在由冯纽曼（von Neumann）的极小极大定理（minimax theorem）保证。本题中两个三元组的变体是朝这个方向迈出的第一步，

因为 Adam 的最佳防守就是把他的选择分散到几个三元组上。想做同类精神的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）。至于支撑混合策略的概率工具，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。