详细解答

STEP I 1993，第 9 题

纯数学 · 一阶微分方程

> **STEP I 1993，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

关键思路

这是一道混合问题（mixing problem）：缸内 A 的份量的变化率等于（流入率）减（流出率），而由于混合得很快，流出的液体与缸内液体的浓度相同。首先要留意的是，每个缸的总体积始终不变，所以浓度不过是“A 的份量除以一个常数”。于是每个缸各给出一条一阶线性方程（first-order linear equation），而第一个缸的输出就成为第二个缸的强迫项（forcing term）。

解答

第一个缸

液体以总流率每秒 $a + (b - a) = b$ 升流入第一个缸，并以每秒 b 升流出，所以对所有 $t \geq 0$，缸内体积一直保持在初始值 K 升。

由于混合得很快，在时间 t 缸内液体是均匀的，其中化学品 A 所占的比例为 $V(t)/K$。在一段短时间 δt 内，有 $a\,\delta t$ 升的 A 流入，并有 $b\,\delta t$ 升的混合液流出，其中 $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$ 升是 A。因此

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

两边除以 δt，再令 $\delta t \to 0$，得

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

这正是所求的方程。

这是一条常系数线性方程。把它写成 $\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$，再乘以积分因子（integrating factor）

$\mathrm{e}^{bt/K}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad \Longrightarrow \quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

最初缸内只有化学品 B，所以 $V(0) = 0$，由此得 $C = -\frac{aK}{b}$。因此

$$V(t) = \frac{aK}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}), \qquad t \geq 0,$$

正如所求。

第二个缸

第二个缸每秒从第一个缸接收 b 升液体，并以每秒 b 升排出，所以它的体积保持在 L 升。设 $W(t)$ 为时间 t 时缸内 A 的体积，则 $W(0) = 0$。

? **想一想** 化学品 A 以甚么速率流入第二个缸?

它流入的速率恰好就是它离开第一个缸的速率，即 $\frac{bV}{K} = a(1 - \mathrm{e}^{-bt/K})$。根据同样的快速混合论证，它以速率 $\frac{bW}{L}$ 流出。所以

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

乘以积分因子 $\mathrm{e}^{bt/L}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

因为 $L \neq K$，指数 $b(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}) = \frac{b(K-L)}{KL}$ 不等于零，所以第二项可以当作指数函数来积分：

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{-bt/L}$，并注意到 $\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$，

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

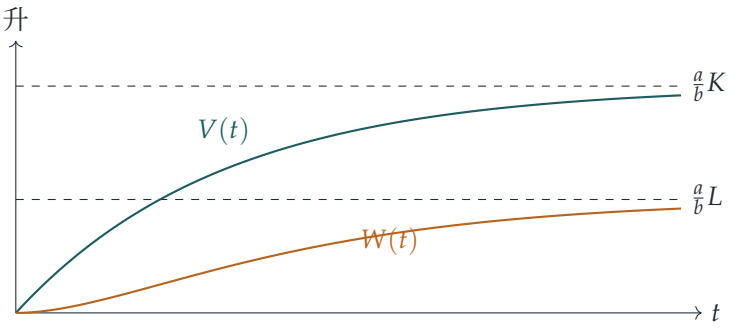
代入 $W(0) = 0$:

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b} \cdot \frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

所以在时间 $t \geq 0$，第二个缸内有

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{K\mathrm{e}^{-bt/K} - L\mathrm{e}^{-bt/L}}{K-L}\right)}$$

升化学品 A。



草图取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$。留意 W 起初的斜率为零：一开始从第一个缸流来的液体中几乎没有 A。

验算

- 在 $t=0$ 时，括号内的值为 $1-\frac{K-L}{K-L}=0$，理应如此。另外 $\dot{W}(0)=0$，与 A 以速率 $bV(0)/K=0$ 流入这一事实吻合。
- 当 $t\to\infty$ 时，$V\to\frac{a}{b}K$ 而 $W\to\frac{a}{b}L$：两个缸内 A 的浓度最终都是 a/b，即流入液体的浓度。
- 除了前面的因子 L 之外，公式对 K 和 L 是对称的，这正好可以用来检查代数运算是否前后一致。
- 取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$、$t=5$：$V=5(1-\mathrm{e}^{-1})\approx 3.1606$，而 $W=2.5(1-\mathrm{e}^{-1})^2\approx 0.99894$。对两个缸进行数值模拟（同时追踪体积），在多组随机选取的 a,b,K,L 之下，结果与两条公式相符，误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 把 A 的流出率当作 $b-a$ 或 a：流出率应是总流出率乘以浓度。
- 把 A 流入第二个缸的速率当作 a：只有离开第一个缸的 A 才会到达第二个缸。
- 忘记为何需要 $L\neq K$：若 $L=K$，强迫项 $\mathrm{e}^{-bt/K}$ 是齐次方程（homogeneous equation）的解，答案会改为含有 $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ 一项。

STEP 之外

一连串充分混合的缸是标准的房室模型（compartment model），可用来描述药物剂量在体内的流动，以及放射性衰变链。把它写成方程组 $\dot{\mathbf{x}}=M\mathbf{x}+\mathbf{f}$ 后，衰减率 b/K 和 b/L

就是 M 的特征值（eigenvalue），而 $L = K$ 的情况就是重特征值，也就是产生 $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ 形式的解的那种“共振”（resonance）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）正是以这种方式处理混合问题和线性方程组。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。