详细解答

STEP I 1993，第 8 题

纯数学 · 球面与向量

STEP I 1993，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q8

关键思路

在第 (i) 部分，把原点和坐标轴放在具有对称性的位置。如果球心位于 z 轴上，而平面是 $z = 0$，那么方程几乎会替我们完成所有工作。两个球面的情况也不会更难，因为把两者的方程相减，所有平方项都会抵消，剩下的是一个平面的方程。在第 (ii) 部分，坐标同样把一切化为纯量积（scalar product）的计算。把 B 放在原点，这样两根杆的顶端都可以由 E 量起。

解答

第 (i) 部分

球面与平面。设球面（sphere）的球心为 O'，半径为 $r > 0$，并设 N 为由 O' 至平面的垂足（foot of the perpendicular）。取 N 为原点，平面为 $z = 0$，并令 z 轴沿 NO' 方向。于是 $O' = (0, 0, d)$，其中 $d \geq 0$ 是球心到平面的距离。球面的方程是

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

所以一点同时位于球面和平面上，当且仅当 $z = 0$ 并且

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

- 若 $d < r$，这是平面上以 N 为圆心、半径为 $\sqrt{r^2 - d^2}$ 的圆。
- 若 $d = r$，则 $x^2 + y^2 = 0$ 迫使 $x = y = 0$，所以交集只有 N 一点（该平面是切平面（tangent plane））。
- 若 $d > r$，右方为负数，所以没有任何点符合条件，交集是空集。

这几种情况涵盖了所有可能，第一个命题因而得证。

两个球面。设两个球面的半径为 $r, s > 0$，球心相异，相距 $c > 0$。把第一个球心放在原点，第二个放在 $(0, 0, c)$：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

? **想一想** 两个二次方程的解集，怎么可能只是一个圆?

把第一个方程减去第二个方程。所有平方项都会抵消，剩下

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{其中} h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

由于两个球心相异，所以可以除以 c。一点同时位于两个球面上，当且仅当它位于第一个球面上并且满足相减所得的方程，所以

$$(\text{球面 1}) \cap (\text{球面 2}) = (\text{球面 1}) \cap (\text{平面} z = h).$$

根据第一个结果，这是一个圆、一点或空集。（明确地说，当 $|h| < r$ 时，它是平面 $z = h$ 上的圆 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$；当 $|h| = r$ 时是单独一点；当 $|h| > r$ 时是空集。）这个圆所在的平面垂直于连心线（line of centres），而圆心就在这条线上。

第 (ii) 部分

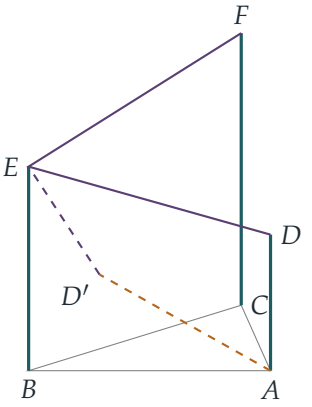
关于底部位置的假设。题目没有说明 A、B 和 C 的位置。我们假设它们位于水平地面上一个边长为 2 m 的等边三角形（equilateral triangle）的顶点。这个布局能得出题目所述的角（见“验算”）。

取 B 为原点，z 轴为铅垂方向：

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

因此各杆的顶端是

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$



图中的 D'（虚线）是破坏者移动杆子之后 D 的位置。

原来的雕塑。使用由 E 出发的向量（vector），

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$，而 $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$。因此

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

正如所求。

破坏者动手之后。杆 AD 的长度仍然是 2，底端仍然在 A。它现在位于通过 A 和 B 的铅垂平面（即平面 $y = 0$）之内，向 B 倾斜，与地面成 $\frac{1}{4}\pi$ 角。由 A 走向 B 就是 $-x$ 的方向，所以

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\, 0,\, 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\, 0,\, \sqrt{2}\right).$$

由于 $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ 介乎 0 与 2 之间，点 D' 确实在线段 AB 的上方。现在

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

并且

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

? **想一想** 点积（dot product）是负数。这告诉我们这个角有甚么特点？

纯量积为负，表示这个角是钝角（obtuse angle），所以我们需要的是介乎 $\frac{1}{2}\pi$ 与 π 之间的 $\cos^{-1}$ 值：

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$

$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ 弧度（准确至四位有效数字）}.$$

验算

- 若底部是边长为 s 的等边三角形，用同样的方法可得 $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$。只有当 $s=2$ 时，这个值才等于 $\frac{1}{5}$，这支持了我们对底部所作的假设。数值验算确认当 $s=2$ 时 $\cos\angle DEF = 0.2$。
- 已用数值方法验算 $|AD'|=2$ 和 $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$。新的角算得为 1.838525… 弧度（约 105.3°），与上面的精确形式吻合。
- 第 (i) 部分：以随机选取的球面作测试，并在预测的圆上取点；这些点都在两个曲面上，误差在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 在两个球面的情况中，声称两个方程之差就是交集。该平面只是包含了交集；我们仍然要求出这个平面与其中一个球面的交集。
- 把 D' 放在 A 的另一侧，即远离 B 的一方。该点并不在线段 AB 的上方，而且会得出不同的角。
- 以度数作答，或者因为漏掉负号而把答案写成锐角 $\cos^{-1}(0.2645)$。

STEP 之外

把两个球面的方程相减而得到一个平面，正是两个圆或两个球面的*根平面*（radical plane；在二维的情况则是根轴（radical axis））背后的想法。同样的技巧可以把 GPS 式的三边测量（trilateration）化为线性问题。更一般地说，任何二次曲面（quadric surface）与平面的交集都是圆锥曲线（conic），而为这类交集分类，是利用二次型（quadratic form）学习线性代数（linear algebra）的一个很好的入门练习。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）建立了所需的工具，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的坐标几何题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。