详细解答

STEP I 1993，第 7 题

纯数学 · 三次方程的根

STEP I 1993，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q7

关键思路

首项系数为正的三次函数（cubic）由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，所以关于它的根（root）的一切，都由它的两个转向点（turning point）决定。如果曲线的极大值（local maximum）在横轴之上，而极小值（local minimum）在横轴之下，图像必定与横轴相交三次；否则相交的次数较少。对于 x^3+ax^2+b，转向点很容易准确求出，因为它的导数（derivative）可以因式分解。

解答

转向点

对于 $\mathrm{f}(x)=x^3+Ax^2+B$，

$$\mathrm{f}'(x)=3x^2+2Ax=x(3x+2A),$$

所以驻点（stationary point）位于 $x=0$ 和 $x=-\frac{2A}{3}$。函数在这两点的值是 $\mathrm{f}(0)=B$ 和

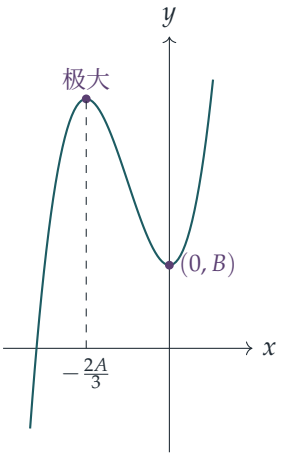
$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right)=-\frac{8A^3}{27}+\frac{4A^3}{9}+B=\frac{4A^3}{27}+B.$$

此外 $\mathrm{f}''(x)=6x+2A$，所以 $\mathrm{f}''(0)=2A$ 而 $\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3})=-2A$。当 $A>0$ 时，位于 $x=0$ 的点是极小点，位于 $x=-\frac{2A}{3}$ 的点是极大点；当 $A<0$ 时，两者的角色互换。

$A>0$、$B>0$ 时的草图

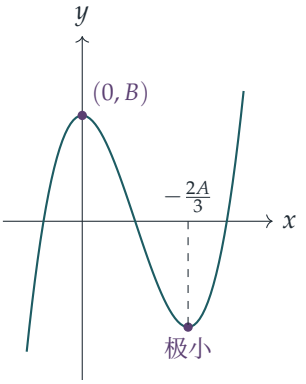
极大点位于 $(-\frac{2A}{3},\, B+\frac{4A^3}{27})$，在 y 轴的左方，而且比 B 高；极小点位于 $(0,B)$，在正 y 轴上。两个转向点都在 x 轴之上，所以曲线恰好与它相交一次，交点在极大点的左方。（图

中取 $A=3$，$B=2$：极大点 $(-2,6)$，极小点 $(0,2)$。）



$A<0$、$B>0$ 时的草图

现在极大点位于 $(0,B)$，而极小点位于 $\left(-\frac{2A}{3},\, B+\frac{4A^3}{27}\right)$，在 y 轴的右方。由于 $A^3<0$，极小值小于 B，它可以是正数、零或负数。必定有一个根满足 $x<0$，因为 $\mathrm{f}(0)=B>0$，而当 $x\to-\infty$ 时 $\mathrm{f}\to-\infty$。如果极小点跌到横轴之下，就另有两个根满足 $x>0$（如图所示，$A=-3$，$B=2$：极小点 $(2,-2)$，根为 $1-\sqrt{3}$、1、$1+\sqrt{3}$）。如果极小点在横轴上，曲线就在该处与横轴相切。如果极小点在横轴之上，那个负根就是唯一的根。



数算根的数目

现在考虑 $\mathrm{g}(x)=x^3+ax^2+b$。如果 $a=0$，则 g 严格递增（strictly increasing）（它的导数 $3x^2$ 只在 0 处为零），所以它恰好有一个实根。因此假设 $a\neq0$。由上文的结果，g 有两个相异的转向点，函数值分别是 b 和 $b+\frac{4a^3}{27}$。

想一想 两个转向点的函数值怎样告诉我们根的数目?

设转向点为 $x_1 < x_2$。这个三次函数在 $(-\infty, x_1]$ 上严格递增，在 $[x_1, x_2]$ 上严格递减，在 $[x_2, \infty)$ 上严格递增，所以在每一段上最多有一个根。如果 $\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知在 $(-\infty, x_1)$、(x_1, x_2) 和 (x_2, ∞) 中各有一个根（这里用到当 $x \to \mp\infty$ 时 $\mathrm{g} \to \mp\infty$），所以共有三个相异的根。相反，如果两个值同号，或者其中一个为零，则至少有一段的内部没有根，根的数目最多是两个。极大值永远是两个值之中较大的一个，所以“一正一负”等同于“两者之积为负”。因此 g 有三个相异实根，当且仅当

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

（乘以 $27 > 0$ 不会改变不等式的方向。）这个结论也涵盖 $a = 0$ 的情况，此时 $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$。

第一个条件

假设 $27b^2 + 3a^3 b < 0$。那么 $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$，所以 $a^3 b < 0$，因此

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

根据上述判别准则，方程有三个相异实根，这正是所要证明的。

第二个条件

按照试卷上所印的写法，第二个条件重复了不等式 $27b^2 + 4a^3 b < 0$，而用“$<$”的话，这个命题是错的：取 $a = -3$，$b = 1$，得 $27 - 108 = -81 < 0$，但 $x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $x = 0$ 处取值 1，在 $x = 2$ 处取值 -3，所以它有三个相异实根。题目原意的不等式必定是方向相反的那一个。判别准则显示，如果

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

（其实只要 $27b^2 + 4a^3 b \geq 0$），方程的相异实根就少于三个。至此全题完成。

所以准确的分界线是 $27b^2 + 4a^3 b = 0$。含 $3a^3$ 的条件对于有三个根是充分但非必要的：取 $a = -2$，$b = 1$，得 $27b^2 + 3a^3 b = 3 > 0$，但 $27b^2 + 4a^3 b = -5 < 0$，而 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x - 1)(x^2 - x - 1)$ 有三个根 1 和 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$。

验算

取 $A = -3$，$B = 2$，得 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$，它的根 1、$1 \pm \sqrt{3}$ 与草图吻合，而且 $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$，正如判别准则所预测。数值方面，对于约

80,000 对满足第一个条件的随机有理数 (a, b)，两个驻点值总是异号。在 200,000 对数值中，“有三个相异根”与 $27b^2 + 4a^3b < 0$ 完全吻合。

常见错误

- 忘记 $a = 0$ 的情况，此时两个转向点合并成一个拐点（point of inflection）。
- 把转向点的函数值为零当作有三个根：这种情况得到的是重根（repeated root），所以只有两个相异的根。
- 尝试完全按照所印的写法去证明第二个命题，而没有留意到它与判别准则矛盾。

STEP 之外

$-(4a^3b + 27b^2)$ 这个量是 $x^3 + ax^2 + b$ 的判别式（discriminant），是 $b^2 - 4ac$ 在三次方程中的对应物。它等于各根之差的平方之积，所以有三个相异实根时它是正数，有重根时是零，有两个复数根时是负数。判别式和根的对称函数（symmetric functions）会在伽罗瓦理论（Galois theory）中进一步发展；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是一本很好的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。