详细解答

STEP I 1993，第 6 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP I 1993，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q6

关键思路

一切取决于当 $N = 10^{100}$ 时 x^N 的表现。若 $|x| < 1$，即使只比 1 小一点点，x^N 也小得难以想像；若 $|x| > 1$，即使只比 1 大一点点，它也大得难以想像；而在 $x = \pm 1$ 时，它恰好等于 1（因为 N 是偶数）。所以分式 $x^N/(1+x^N)$ 的表现就像一个开关：在 $(-1, 1)$ 之内是 0，在其外是 1。至于 h，思路刚好相反：$10^{-N}x$ 实在太小，以致 sin 与它的自变量根本无从分辨。

解答

以下一律记

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

于是 $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$，而 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$。

f 的特征

- 对称性与值域（*range*）。N 是偶数，所以 $x^N = (-x)^N \geq 0$。因此 f 是偶函数（even function），而由 $0 \leq s(x) < 1$ 可得 $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$。
- 当 $|x| < 1$ 时的水平 $y = 2$。这时 $x^N \to 0$ 的速度快得惊人：例如 $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4\times 10^{97}}$。所以 $s(x) \approx x^N$ 远远小于任何图像所能显示的程度，在任何看得见的精确度下 $\mathrm{f}(x) = 2$。准确而言，$\mathrm{f}(0) = 2$。
- 当 $|x| > 1$ 时的水平 $y = 3$。现在 x^{-N} 同样微小，所以在任何看得见的精确度下 $s(x) = 1/(1+x^{-N})$ 就是 1，而 $\mathrm{f}(x) = 3$，并且是从下方趋近。（事实上，当 $|x| \to \infty$ 时，直线 $y = 3$ 是一条渐近线（asymptote）。）

- 在 $x = \pm 1$ 处的跳跃。在 $x = \pm 1$ 处，$x^N = 1$，所以 $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$，正好在半途。这个函数是连续（continuous）而且可微（differentiable）的，所以草图中的垂直线段其实是极之陡峭的攀升。求导可得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

? **想一想** 图像中“垂直”的部分究竟有多窄?

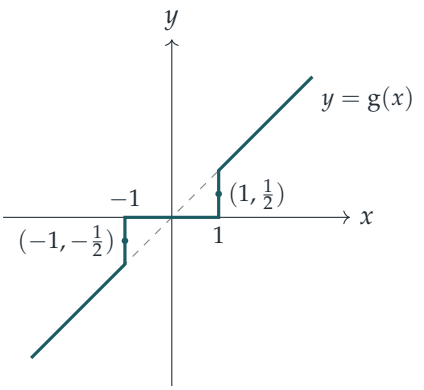
设 $x = 1 + \delta$，其中 δ 很小，则 $x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$，而 $s(x) \approx 1/(1+\mathrm{e}^{-N\delta})$。当 $N\delta$ 由 $-\ln 99$ 增至 $\ln 99$ 时，它由 0.01 攀升至 0.99，也就是说，整个过程只发生在一个宽度约为 9×10^{-100} 的区间内。在任何图上，这都是一条垂直线。根据对称性，在 $x = -1$ 处也是如此。（f' 的正负号还告诉我们，f 在 $x > 0$ 时递增，在 $x < 0$ 时递减，因为 x^{N-1} 与 x 同号。）

g 的图像

由于 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$，开关 s 现在乘在直线 $y = x$ 上：

- 当 $|x| < 1$ 时，$s(x)$ 可以忽略，所以在任何看得见的精确度下 $\mathrm{g}(x) = 0$（在 $x = 0$ 处恰好是 0）；
- 当 $|x| > 1$ 时，在任何看得见的精确度下 $s(x)$ 就是 1，所以 $\mathrm{g}(x) = x$；准确而言，$x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$，这个差可以忽略；
- 在 $x = \pm 1$ 处，$\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$，正好在每个跳跃的半途。

g 是奇函数（odd function），因为 s 是偶函数而 x 是奇函数。它也是递增的：$\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$，而这两项都 ≥ 0，因为 x 与 $s'(x)$ 同号。在 $x = 1$ 处斜率是 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$，所以我们再次看到一个看似垂直的跳跃，这次是在 $x = 1$ 处由 0 升至 1，以及在 $x = -1$ 处由 -1 升至 0。



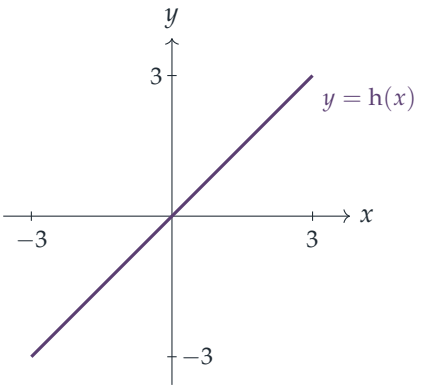
g 在 $[-3,3]$ 上的草图：在 $(-1,1)$ 上为零，在其外是直线 $y=x$（虚线），两者之间由经过 $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$ 的近乎垂直的攀升连接起来。

h 的图像

设 $u=10^{-N}x$。当 $|x|\le 3$ 时，我们有 $|u|\le 3\times 10^{-N}$，这是极其微小的。对于细小的 u，$\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$，而当 $u>0$ 时我们有上下界 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$。乘以 10^N，当 $0\le x\le 3$ 时，

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

而 h 是奇函数，所以当 $-3\le x\le 0$ 时同样的结论成立，只是正负号相反。因此在 $[-3,3]$ 上，在任何想像得到的精确度下，h 的图像就是经过原点的直线 $y=x$，在 $x>0$ 时比它低一丝，在 $x<0$ 时比它高一丝。它的斜率是 $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$，与 1 的差距约在 10^{-2N} 之内。



正弦波仍然存在，只是被极度拉阔了：它的第一个极大值位于 $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$，高度为 10^N，所以在窗口 $[-3,3]$ 内只看得见经过原点、看似笔直的一小段。

验算

- 以 $s=1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$ 直接计算：$s(0.999)$ 和 $s(1.001)$ 在机器精确度下分别是 0 和 1，而 $s(\pm1)=\frac{1}{2}$ 是准确值。
- 取一个不太大的 N，例如 $N=10$ 或 200，数值微分证实 $s'(1)=N/4$ 和 $\mathrm{g}'(1)=\frac{1}{2}+N/4$，而细密的格点显示 g 在 $[-3,3]$ 上递增。增大 N 只会令阶梯更加陡峭分明。
- 对于随机选取的 $x\in[-3,3]$，$10^{100}\sin(10^{-100}x)$ 与 x 在完整的双精度下吻合，而按比例缩小的类比 $M\sin(x/M)$ 在 $M=1000$ 时符合上下界 $0<x-M\sin(x/M)\le x^3/(6M^2)$。

常见错误

- 忘记 N 是偶数：当 $x < -1$ 时，x^N 极大而且是正数，所以 f 在那里是 3，而不是别的数值。
- 把阶梯说成真正的不连续点。三个函数全都是连续的（其实还是可微的）；那些攀升只是陡峭得画不出来。
- 把 h 当成一个振荡的图像。在 $[-3,3]$ 上，它离任何转向点都还远得很。

STEP 之外

函数 $x^n/(1+x^n)$ 在 $n \to \infty$（只取偶数值）时逐点收敛（pointwise convergence）于一个阶梯函数（step function），它在 $(-1,1)$ 之内是 0，在 ± 1 处是 $\frac{1}{2}$，在其外是 1：这是一列光滑函数，其极限却不连续。这是一个经典例子，说明为何分析学家需要一致收敛（uniform convergence），而这正是实分析（real analysis）入门课程的核心概念。函数 h 则展示了另一面：当 $M \to \infty$ 时，$M\sin(x/M) \to x$ 在有界区间上一致收敛。Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门读本）把这两个概念都讲得十分易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。