详细解答

STEP I 1993，第 5 题

纯数学 · 绝对值与三角不等式

STEP I 1993，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q5

关键思路

一切都建基于三角不等式（triangle inequality）：和的长度不会超过各项长度之和。逐项运用这个不等式，便可用一个关于 $|z|$ 的等比级数（geometric series）来界定多项式的大小；而当 $|z| \leq \frac{1}{2}$ 时，这个级数始终严格小于 1。若要成为根（root），多项式部分必须等于 -1，而它的模（modulus）恰好是 1，所以根不可能落在圆盘（disc）$|z| \leq \frac{1}{2}$ 之内。

解答

模与乘积法则

设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数，则模就是原点到点 (x, y) 的距离：

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(取非负平方根)}.$$

设 $z_1 = a + \mathrm{i}b$ 及 $z_2 = c + \mathrm{i}d$，其中 a, b, c, d 为实数。那么 $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$，所以

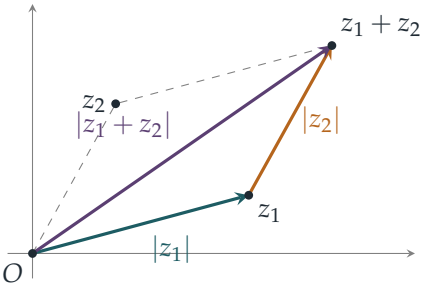
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$ 和 $|z_1||z_2|$ 都是非负数，所以两边取平方根便得 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，这正是所要证明的结果。

三角不等式

在阿根图（Argand diagram）上，设 O 为原点，A 为点 z_1，C 为点 z_1+z_2。那么 $\overrightarrow{AC}$ 代表 z_2（它与由 O 到 z_2 的向量相同），所以 OAC 是一个三角形，其边长为

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1+z_2|.$$



两点之间以直线最短：由 O 直接走到 C，不会比绕道 A 更长。因此

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|,$$

等号成立，当且仅当 O、A、C 三点共线而 A 位于另外两点之间，也就是说，z_1 与 z_2 指向同一方向（或其中一个为 0）。

如果你较喜欢代数方法：以 $\bar{z}$ 表示共轭（conjugate），则

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

这是因为复数的实部不会超过它的模，而根据乘积法则，$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$。

重复运用这个不等式（对项数作一个简单的归纳法（induction）），便得

$$|w_1+w_2+\cdots+w_n| \le |w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|$$

对任意复数 $w_1,\ldots,w_n$ 均成立。

多项式的上界

假设对每个 j 都有 $|a_j| \le 1$，并且 $|z| \le \frac{1}{2}$。那么

$$\begin{aligned}\left|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z\right| &\le |a_n||z|^n+|a_{n-1}||z|^{n-1}+\cdots+|a_1||z|\\ &\le |z|^n+|z|^{n-1}+\cdots+|z|\\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\tfrac{1}{2}\\ &= 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\\ &< 1.\end{aligned}$$

第一行用了 n 项的三角不等式，再配合乘积法则（重复使用，从而得出 $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$）。第二行用了 $|a_j| \le 1$，第三行用了 $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$，第四行则是把有限等比级数求和。这就是所要求的严格不等式。

> **想一想** 那个严格不等式是从哪里来的？上面每一步都只是“$\le$”。

它来自有限等比级数：$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 与 1 之间恰好相差 $\frac{1}{2^n} > 0$。接下来的推论所需要的，正是这个差距。

根

（试卷最后一行写的是 $|x| > \frac{1}{2}$；这显然是 $|w| > \frac{1}{2}$ 的误印，因为所讨论的根是 w。）

设 w 为一个根，则

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{因此} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

用反证法（proof by contradiction），假设 $|w| \le \frac{1}{2}$。那么在上一部分取 $z = w$，便得 $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$，这与模恰好等于 1 矛盾。因此每个根都满足 $|w| > \frac{1}{2}$。

验算

- 这个上界在极限情况下可以达到：当每个 $a_j = 1$ 而 $z = \frac{1}{2}$ 时，左边恰好等于 $1 - 2^{-n}$。
- 关于根的结论同样是最佳的。取每个 $a_j = -1$，得到 $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$，它的正根在 $n = 1$ 时是 1，在 $n = 2$ 时是 0.618（即黄金比的共轭值），在 $n = 5$ 时是 0.5087，在 $n = 10$ 时是 0.50025：总是大于 $\frac{1}{2}$，却趋向于它。
- 数值方面，我们测试了 50 000 组随机选取的数据，其中 a_j 取自单位圆盘，z 取自半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆盘（所得的最大值为 0.79）；又求出了 2000 个这类随机多项式的所有根：根的模最小为 0.562。

常见错误

- 写成 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$。三角不等式只能给出“$\le$”。
- 使用无穷级数之和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$，这样只能得到 ≤ 1，令推论无法成立。应该用有限和。
- 忘记说明为何 $|z^k| = |z|^k$：它可由你刚刚证明的乘积法则推出。

STEP 之外

这是多项式根的界的入门版本，而这类界正是数值求根方法的基础：柯西（Cauchy）界把多项式的每个根都限制在一个圆盘之内，其半径只取决于系数的大小；而同样的“主导项胜出”论证，也是复分析（complex analysis）中鲁歇（Rouché）定理的核心。三角不等式本身就是度量（metric）的定义性质，而度量这个抽象的距离概念，正是大学一年级分析课程的核心。若想看一个以几何观点出发、处理得极为优美的讲法，可读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。