详细解答

STEP I 1993，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 1993，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q4

关键思路

代换（substitution）$t = \pi - x$ 把区间 $[0, \pi]$ 反射到它自身，而且不会改变 $\sin x$，因为 $\sin(\pi - t) = \sin t$。于是那个碍事的因子 x 变成 $\pi - t$，而我们要求的积分会带着负号在右边再次出现，这样就可以把它解出来。至于其后的积分，主要工作是把 $1 + \cos^2 x$ 用 $\sin x$ 表示。在 $[\pi, 2\pi]$ 上，平移 π 就可以回到 $[0, \pi]$。

解答

一般结果

设 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，并令 $t = \pi - x$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$。当 $x = 0$ 时 $t = \pi$，当 $x = \pi$ 时 $t = 0$。另外 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

最后一个积分又是 I，因为积分变量（variable of integration）叫甚么名字并无关系。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$，由此得

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

这正是所要证明的结果。（我们需要这些积分存在，例如 f 在 $[-1, 1]$ 上连续（continuous）即可。）

$[0,\pi]$ 上的积分

> **想一想** 被积函数（integrand）含有 $\cos^2 x$，而不只是 $\sin x$。它真的是 $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ 的形式吗?

是的。由于 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$，我们有 $1+\cos^2 x = 2-\sin^2 x$，所以

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{其中} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2-s^2},$$

而且 f 在 $[-1,1]$ 上连续。根据一般结果，

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

余下的积分很容易，因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的导数（derivative）（差一个负号）。代入 $u=\cos x$，其中 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$[0,2\pi]$ 上的积分

一般结果只适用于 $[0,\pi]$，所以我们把积分范围拆开：

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

> **想一想** 怎样才能把 $\int_\pi^{2\pi}$ 化回 $[0,\pi]$ 上的积分?

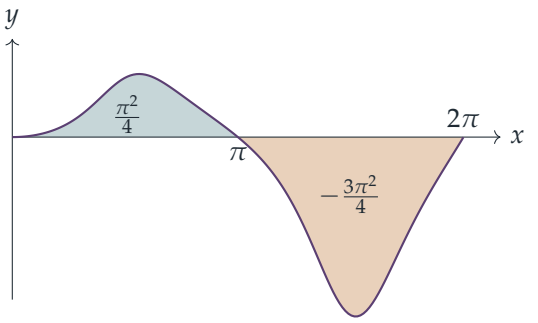
平移 π：令 $x = u+\pi$，于是 u 由 0 变到 π。这时 $\sin x = -\sin u$ 而 $\cos x = -\cos u$，所以 $\cos^2 x = \cos^2 u$。因此

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u+\pi)(-\sin u)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},\end{aligned}$$

这里用了上一部分的两个结果。把两部分相加，

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

从图像可以看出答案为甚么是负数。在 $[\pi,2\pi]$ 上，因子 $\sin x$ 是负的，而且那里的因子 x 比在 $[0,\pi]$ 上的大。所以轴下方的面积多于轴上方的面积。



验算

- 取 $f \equiv 1$：一般结果给出 $\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}$，这是正确的。
- 被积函数在 $(0,\pi)$ 上为正，所以第一个答案必须是正数，而 $\pi^2/4 \approx 2.467$ 确实如此。用辛普森法则（Simpson's rule）计算，第一个积分得 2.4674011，第二个得 -4.9348022，与 $\pi^2/4$ 和 $-\pi^2/2$ 吻合。
- 随机选取几个 f 作数值检验，一般恒等式（identity）同样成立。

常见错误

- 直接在 $[0,2\pi]$ 上套用一般结果。这个结果依赖反射 $x \mapsto \pi - x$ 把区间映射到它自身，而在 $[0,2\pi]$ 上这样做会得出错误答案 $\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$（那里正确的反射是 $x \mapsto 2\pi - x$，而 $\sin x$ 在这个反射下会变号）。
- 漏掉 $dx = -dt$ 中的负号，或者忘记把积分上下限调换回来。
- 写成 $\arctan(-1) = 3\pi/4$：反正切（arctangent）的取值范围是 $(-\pi/2, \pi/2)$，所以 $\arctan(-1) = -\pi/4$。

STEP 之外

这里的窍门是利用定义域（domain）的一种对称性（symmetry），而被积函数几乎保持这种对称：把 x 换成 $\pi - x$，再把积分的两个版本取平均。用同样的想法，完全不必积分就可以得到 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$。在大学里，这类对称性论证在分析学（analysis）中随处可见，也出现在傅里叶级数（Fourier series）中，在那里函数的奇偶性（parity）决定哪些项得以保留。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多这类代换的 STEP 式练习，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 则严格地建立了变量代换法则（change-of-variables rule）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。