详细解答

STEP I 1993，第 3 题

纯数学 · 丢番图方程

> **STEP I 1993，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

关键思路

由于 $p \le q \le r$，倒数（reciprocal）$\frac{1}{p}$ 是三项之中最大的一项。所以三项之和最多是 $\frac{3}{p}$，这样 p 就只剩下两三个可能的值。p 一经确定，对余下两项再用同一招便可限制 q 的范围，然后 r 就别无选择。整个想法是利用大小次序，把一条含三个未知数的方程（或不等式（inequality））化为一次简短的有限验证。

解答

第 (i) 部分

由于 $1 \le p \le q \le r$，我们有 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$。所以

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

由此得 $p \le 3$。另外 $p \neq 1$，否则 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$，而这对正数 q, r 是不可能的。所以 $p = 2$ 或 $p = 3$。

情况 $p = 2$。这时 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$。由于 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

又因为 $\frac{1}{r} > 0$，必须有 $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$，所以 $q \ge 3$。

- $q = 3$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，所以 $r = 6$。
- $q = 4$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，所以 $r = 4$。

情况 $p=3$。这时 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{q}$，所以 $q\le 3$。连同 $q\ge p=3$，只可能是 $q=3$，于是 $\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$，所以 $r=3$。

所有情况都已考虑，因此仅有的解是

$$(p,q,r)=(2,3,6),\quad (2,4,4),\quad (3,3,3),$$

再没有其他解。

第 (ii) 部分

若 $p=1$，则无论 q 和 r 取甚么值，和都是 $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$。这些就是题目已告诉我们的解。（按次序 $p\le q\le r$，这些解就是 $q=n$、$r=m$，其中 $1\le n\le m$。题目在 m 与 n 之间所写的不等式方向反了，但这并无影响：$p=1$ 对任何 q 和 r 都成立。）所以我们要找的是 $p\ge 2$ 的解。

和之前一样，$\frac{1}{p}$ 是最大的一项，所以

$$1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{3}{p}\quad\Longrightarrow\quad p<3.$$

连同 $p\ge 2$，得 $p=2$。现在我们需要

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

? **想一想** 为甚么这次 q 的上界是严格（strict）不等式？这有没有影响？

由于 $\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}$，我们有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{2}{q}$，所以 $q<4$。正是这个严格不等式排除了 $q=4$。（在第 (i) 部分，$q=4$ 是容许的，并给出等号成立的情况 $(2,4,4)$。）连同 $q\ge p=2$，得 $q=2$ 或 $q=3$。

- $q=2$：和是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{r}>1$，对每一个 r 都成立。所以对每个整数 $r\ge 2$，$(2,2,r)$ 都是解。
- $q=3$：我们需要 $\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $r<6$。连同 $r\ge q=3$，得 $r=3,4,5$。

所以，除了 $p=1$ 的那一族解之外，其余的解是

$$(p,q,r)=(2,2,r)\text{ 其中 }r\text{ 为任何整数，}r\ge 2,\qquad (2,3,3),\quad (2,3,4),\quad (2,3,5).$$

以上每一步都是别无选择的，所以再没有其他解。

验算

直接代入。例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$，但 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 刚好相等。这说明了为甚么 $(2,3,5)$ 是 $q=3$ 那一族的最后一个，而 $(2,3,6)$ 则是第 (i) 部分的边界情况。同样，$(2,4,4)$ 给

出的和刚好是 1，所以 $p = 2$、$q = 4$ 的组合全都进不了第 (ii) 部分。用电脑搜索所有 $1 \leq p \leq q \leq r < 400$，结果与两张清单完全吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分漏掉无穷多个解的那一族 $(2, 2, r)$。一旦 $p = q = 2$，头两项加起来已经是 1。
- 在第 (ii) 部分把 $p < 3$ 写成 $p \leq 3$，然后在 $p = 3$ 上浪费时间（这时和最多只是 1）。
- 只列出解，却没有说明每种情况都已检查。“再没有其他解”这一句占了一半分数。

STEP 之外

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ 的解，正好就是那些能令内角为 $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ 的三角形存在于球面上的三元组。它们与三维空间中的有限对称群（symmetry group）互相对应：二面体群（dihedral）$(2, 2, r)$、四面体群（tetrahedral）$(2, 3, 3)$、八面体群（octahedral）$(2, 3, 4)$ 和二十面体群（icosahedral）$(2, 3, 5)$。第 (i) 部分则给出平面的三种正则镶嵌（regular tiling）。像这样要求整数解的方程，称为丢番图方程（Diophantine equation）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是很好的入门书，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 则讲述了这些对称群。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。