详细解答

STEP I 1993，第 2 题

纯数学 · 等比级数

> **STEP I 1993，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

关键思路

每个级数（series）都是抽走了部分项的等比数列（geometric progression）。$S_n(r)$ 中的指数是所有不是 3 的倍数的数。$T_n(r)$ 中的指数是偶数或 3 的倍数的数。因此，我们把每个和写成若干个完整等比数列的组合：取一个完整的数列再减去不要的项，或者把两个数列相加，再减去重复计算了的项。

解答

偶数次幂之和

左边是一个首项为 1、公比（common ratio）为 r^2、共有 $n+1$ 项的等比数列。把它记作 E。那么

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

因为其余各项全部互相抵销。若 $|r| \neq 1$，则 $r^2 \neq 1$，所以可以除以 $1 - r^2$：

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

正是所要证明的结果。（对实数 r 而言，条件 $r^2 \neq 1$ 恰好就是 $|r| \neq 1$。）

级数 $S_n(r)$

指数 $1,2,4,5,7,8,10,\ldots,3n-1$ 是由 1 至 $3n-1$ 之间所有不是 3 的倍数的整数。它们可以配成一对对的 $3k+1,\ 3k+2$，其中 $k=0,1,\ldots,n-1$。所以

$$S_n(r)=\sum_{k=0}^{n-1}(r^{3k+1}+r^{3k+2})=(r+r^2)\sum_{k=0}^{n-1}r^{3k}.$$

最后的那个和是一个公比为 r^3、共有 n 项的等比数列。对实数 r 而言，$r\neq 1$ 即保证 $r^3\neq 1$，所以

$$S_n(r)=\frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

另一个等价的做法，是取所有幂 $r,r^2,\ldots,r^{3n}$，再剔除指数为 3 的倍数的项：

$$S_n(r)=\frac{r(1-r^{3n})}{1-r}-\frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

求极限时要用的，正是这第二个形式。

极限（limit）。若 $|r|<1$，则当 $n\to\infty$ 时 $|r^{3n}|=|r|^{3n}\to 0$。因此

$$S_n(r)\to\frac{r}{1-r}-\frac{r^3}{1-r^3}.$$

现在 $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{1}{1-r}-1$，而 $\dfrac{r^3}{1-r^3}=\dfrac{1}{1-r^3}-1$。两个 -1 互相抵销，余下

$$S_n(r)\to\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^3},$$

正是所要证明的结果。

级数 $T_n(r)$

指数 $0,2,3,4,6,8,9,10,12,\ldots,6n$ 是由 0 至 $6n$ 之间所有偶数或可被 3 整除（或两者皆是）的整数。

> ? **想一想** 如果把偶数次幂与指数为 3 的倍数的幂相加，哪些项被计算了两次?

一个指数既是偶数又是 3 的倍数，当且仅当它是 6 的倍数。所以我们运用容斥原理（inclusion–exclusion）：加上偶数次幂，加上指数为 3 的倍数的幂，再减去指数为 6 的倍数的幂。在 $6n$ 或以下，有

- 偶数次幂 $r^0,r^2,\ldots,r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^2、共有 $3n+1$ 项的等比数列；
- 指数为 3 的倍数的幂 $r^0,r^3,\ldots,r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^3、共有 $2n+1$ 项的等比数列；

- 指数为 6 的倍数的幂 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^6、共有 $n+1$ 项的等比数列。

把第一个结果中的 n 换成 $3n$，再对公比 r^3 和 r^6 运用同样的论证，便得到

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

由于 $|r| \neq 1$，每个分母都不等于零。这就是为甚么题目在这里要求 $|r| \neq 1$，而对 S_n 只要求 $r \neq 1$：$r = -1$ 会令 $1-r^2$ 和 $1-r^6$ 变成零。

极限。若 $|r| < 1$，则 r^{6n+2}、r^{6n+3} 和 r^{6n+6} 全部趋向 0。所以

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

利用 $1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$，以 $1-r^6$ 为公分母通分，便可化简为：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1$、$r = 1$、$r = -1$ 的情况

我们先数一数项数。在每一组六个指数 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$ 之中，是偶数或可被 3 整除的有 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$，即四个。$k = 0, \ldots, n-1$ 的各组涵盖了直至 $6n-1$ 的指数，而最后一项是 r^{6n}。所以 $\mathrm{T}_n(r)$ 共有 $4n+1$ 项。

- $r > 1$：每一项 r^e 都满足 $r^e \geq 1$，所以 $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$，因此 $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$。
- $r = 1$：每一项都等于 1，所以 $\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$。公式在这里失效，因为它的分母都是零。
- $r = -1$：当 e 是偶数时 $(-1)^e$ 为 $+1$，当 e 是奇数时则为 -1。在每一组中，指数 $6k, 6k+2, 6k+4$ 是偶数，而 $6k+3$ 是奇数，所以每一组的贡献是 $1+1-1+1 = 2$。因此

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

在这三种情况下，$\mathrm{T}_n(r)$ 都发散（diverge）至 $+\infty$。留意 $r = -1$ 时同样发散：指数为 3 的奇数倍的项不足以抵销那些偶数次项。试与 $1-1+1-\cdots$ 这类简单的交错级数（alternating series）比较，后者只是振荡（oscillate）而已。

验算

- 在 S_n 的公式中代入 $n = 1$：$\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$，结果正确。

- 在 T_n 的极限中代入 $r = \frac{1}{2}$。公式给出 $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$，而直接把 $\mathrm{T}_n(\frac{1}{2})$ 的几百项加起来，也得到相同的数值。
- 当 $r \to 1^-$ 时，T_n 的极限的表现近似 $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$。这与每六个幂之中有四个出现的事实吻合，即约为完整级数 $\frac{1}{1-r}$ 的三分之二。

常见错误

- 忘记减去指数为 6 的倍数的项，以致把 $1, r^6, r^{12}, \ldots$ 计算了两次。
- 数错各个等比数列的项数。由 0 至 $6n$ 共有 $3n+1$ 个偶数指数，而不是 $3n$ 个。
- 没有实际把一组的项加起来，便假设 $\mathrm{T}_n(-1)$ 会像交错级数那样振荡。

STEP 之外

要数算一个并集(union)中的项,可以把两个集合相加,再减去它们的交集(intersection),这就是*容斥原理*。它与生成函数(generating function)结合起来,是组合数学(combinatorics)和数论（number theory）中的标准工具：我们求得的极限，正是与 6 有公因数的非负整数的生成函数。同样的筛法（sieve）思想，若对每一个质数（prime）都运用一次，便得出黎曼 ζ 函数（Riemann zeta function）的欧拉（Euler）乘积。大学本科的分析学（analysis）会把“当 $|r| < 1$ 时 $r^n \to 0$”这一步严格化，并探讨无穷级数在甚么情况下可以这样重新排列。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。