详细解答

STEP I 1993，第 16 题

概率与统计 · 几何概率

STEP I 1993，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

本题在 *Beyond STEP* 第 12.20 节蒲丰投针中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/buffon.html

关键思路

这就是蒲丰投针问题（Buffon's needle）。针会否跨过最近的那条线，只取决于针尖朝着该线伸出多远，而这段伸出的距离正是半根针在垂直方向上的投影（projection）。先固定针的中心与线的距离，单凭角度求出条件概率（conditional probability），然后再对距离取平均。第一部分的积分正是这个取平均的过程所产生的积分，这就是题目由它开始的原因。

解答

积分

设 $y = \cos^{-1} t$，则 $t = \cos y$，$\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$。当 $t = 0$ 时，$y = \frac{\pi}{2}$；当 $t = 1$ 时，$y = 0$。因此

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

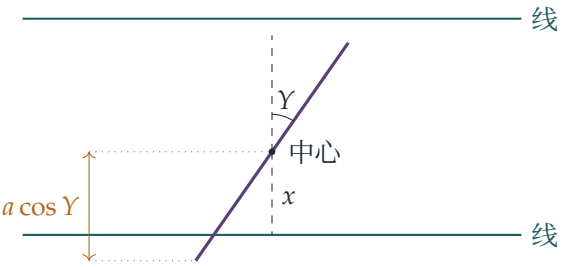
取 $u = y$ 和 $\mathrm{d}v = \sin y \,\mathrm{d}y$，以分部积分法（integration by parts）计算，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y \,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

这正是所求的结果。

（另一做法：这个积分是 $y = \cos^{-1} t$ 与两条坐标轴之间的面积，而这个区域与 $t = \cos y$ 在 $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ 之下的区域相同，面积即 $\int_0^{\pi/2} \cos y \, \mathrm{d}y = 1$。）

已知 $X = x$ 时的概率



针的每一半长度为 a，并与各线的垂直线成角 Y，所以针的两端分别位于中心两侧，与中心的垂直距离为 $a\cos Y$。最近的线与中心相距 x，故此针跨过该线，当且仅当

$$a \cos Y \ \ge \ x.$$

（等号成立时，针尖刚好碰到线，这种情况的概率为零，所以是否把它计算在内并无影响。）

> ? **想一想** 怎样把 $a\cos Y \ge x$ 化为只涉及 Y 的条件?

由于 cos 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是递减的，答案视乎 x/a 这个值能否取到。

- 若 $x \ge a$，则 $a\cos Y \le a \le x$，而等号只在 $Y = 0$ 且 $x = a$ 时成立，所以概率为 0。
- 若 $0 \le x < a$，则 $\cos Y \ge x/a$ 等价于 $Y \le \cos^{-1}(x/a)$，其中 $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$。由于 Y 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布（uniform），

$$\mathrm{P}(\text{跨线} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a}.$$

这里用到了 X 与 Y 的独立性（independence）：即使知道 $X = x$，Y 仍然在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布。

一般投掷的概率

现设 $a < b$。X 的概率密度（density）在 $[0, b]$ 上为 $1/b$。因为 $a < b$，有可能跨线的区间 $[0, a)$ 位于 $[0, b]$ 之内，而条件概率在 $[a, b]$ 上为零。根据全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(\text{跨线}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{跨线} \mid X = x) \, \frac{1}{b} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^a \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a} \, \mathrm{d}x.$$

代入 $x = at$，$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$，并利用第一部分的结果，

$$\mathrm{P}(\text{跨线}) = \frac{2a}{\pi b}\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

这正是所求的结果。由于 $a < b$，针比线与线之间的间距 $2b$ 短，绝不可能碰到第二条线，所以“跨过某一条线”与“跨过最近的线”是同一事件。

验算

- 当 $a \to b$ 时，答案趋向 $2/\pi \approx 0.637$，小于 1，这是必然的：即使针与间距一样长，它仍然经常近乎平行于各线而落下。
- 答案与 a 成正比：把一根短针的长度加倍，跨线的机会也加倍，这与“跨线次数的期望值（expected number）是长度的线性函数”这一事实吻合。
- 按实际的几何情况进行模拟（中心在一条带状区域内均匀分布，角度均匀分布），取 $a = 1$、$b = 2$，投掷 4×10^5 次后得出 0.3183，而 $1/\pi \approx 0.31831$。以中点法则作数值积分（midpoint quadrature），得 $\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = 1.0000000$。

常见错误

- 把 $a\cos Y$ 误写成 $a\sin Y$：这里的 Y 是由各线的垂直线量起，而不是由各线本身量起。
- 以公式 $\frac{2}{\pi}\cos^{-1}(x/a)$ 在整个 $[0, b]$ 上对条件概率积分；这个公式在 $x > a$ 时没有定义，而条件概率在该处为 0。
- 对 X 取平均时忘记乘上密度 $1/b$。

STEP 之外

蒲丰（Buffon）在十八世纪提出这个问题，它是几何概率（geometric probability）的经典例子：把概率当作参数空间中的面积来计算，这里的参数空间是矩形 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$。由于答案涉及 π，投针便可以为 π 提供一个（非常缓慢的）蒙地卡罗（Monte Carlo）估计。这个问题有一个漂亮的推广，称为“蒲丰面条”（Buffon's noodle）：利用期望值的线性性质（linearity of expectation）可以证明，任何形状的曲线，其跨线次数的期望值只取决于曲线的长度。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）涵盖了这类连续联合分布（continuous joint distributions）与取条件的方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。