详细解答

STEP I 1993，第 15 题

概率与统计 • 贝叶斯定理

> **STEP I 1993，第 15 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q15

关键思路

这是一道披着故事外衣的贝叶斯定理（Bayes' theorem）题目。窍门在于以真正的方向为条件，然后问：在每种情况下，那位土著给出这一连串答案的可能性有多大。Biscii 族人永远说谎，所以 Biscii 族人重复作答时，答案必定一致，而且必定指向错误的方向。因此，答案重复出现，会令你更有可能正在跟 Biscii 族人说话，这正是多问一次便可能推翻你原来决定的原因。

解答

只考虑 Ascii 族人

Ascii 族人每次回答问题时，说真话的概率是 $\frac{3}{4}$，且与之前的答案独立（independent）。这条问题只有两个可能的答案（左或右），所以两次答案相同，当且仅当两次都是真话或两次都是假话：

$$\mathrm{P}(\text{两次答案相同}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

正如所求。其中“两次都是真话”的情况占了 $\frac{9}{16}$，所以根据条件概率（conditional probability）的定义，

$$\mathrm{P}(\text{说真话} \mid \text{两次答案相同}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

这就是第二个结果。

两次回答“左”

设 L 为“左是正确方向”这个事件（event），R 为“右是正确方向”这个事件。设 A 和 B 分别为土著是 Ascii 族人和 Biscii 族人的事件，其中 $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$，$\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$，而土著属于哪一族与地理情况独立。船长起初对方向一无所知，所以我们取 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$。设 E_2 为土著两次都回答“左”的事件。

> **想一想** 为甚么求 $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$ 比求 $\mathrm{P}(L \mid E_2)$ 容易?

一旦知道真正的方向，每一族的行为便完全确定，所以答案出现的概率很容易写出来。然后贝叶斯定理便会把这些概率倒转过来。

若左是正确的，Ascii 族人要两次都说真话才会两次回答“左”，概率是 $\frac{9}{16}$。Biscii 族人会说谎而回答“右”，所以不可能产生 E_2。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \frac{11}{16} \cdot \frac{9}{16} + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{99}{256}.$$

若右是正确的，Ascii 族人要两次都说谎才会两次回答“左”，概率是 $\frac{1}{16}$，而 Biscii 族人则必定两次都回答“左”。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11+80}{256} = \frac{91}{256}.$$

L 和 R 的先验概率（prior）相等，所以在贝叶斯定理中互相抵消：

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

这个值大于 $\frac{1}{2}$，所以左是较有可能的方向，船长应该向左走，而他走对的概率是 $\frac{99}{190}$。

三次回答“左”

设 E_3 为三次都回答“左”的事件。同样的推论仍然适用，只是现在 Ascii 族人给出三个独立的答案：

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \frac{11}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{11}{16} \cdot \frac{27}{64} = \frac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \frac{11}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11}{1024} + \frac{320}{1024} = \frac{331}{1024}.$$

由于 $\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$，而且先验概率相等，现在右才是较有可能的方向。确切地说，

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

所以船长应该向*右*走，此时他走对的概率是 $\frac{331}{628}$。

想一想 第三个“左”怎么会令左变得更不可能?

每多一个“左”，Ascii 族人对 $\mathrm{P}(E \mid L)$ 的贡献便乘以 $\frac{3}{4}$。在 $\mathrm{P}(E \mid R)$ 中，Ascii 族人的一项会缩小至原来的 $\frac{1}{4}$，但 Biscii 族人的一项始终保持在 $\frac{5}{16}$。一长串完全相同的答案，正是 Biscii 族人会给出的，所以证据愈来愈倾向于说“这是个说谎者”。说真话的 Ascii 族人也会前后一致，但概率只有 $(\frac{3}{4})^n$，而这个值会逐渐趋向零。

验算

- 只回答一次“左”之后，似然（likelihood）分别是 $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$（已知 L）和 $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$（已知 R），所以 $\mathrm{P}(L \mid \text{左}) = \frac{33}{64}$。数列 $\frac{33}{64} \approx 0.516$、$\frac{99}{190} \approx 0.521$、$\frac{297}{628} \approx 0.473$ 先升后跌，与上面的解释吻合。
- 回答次数很多时，$\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$，因为 Biscii 族人的一项占主导。
- 我们以分数作精确穷举，并模拟了 10^6 次对话，核对了全部四个概率：模拟所得的值是 0.5214（精确值 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$）和 0.5266（精确值 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$）。

常见错误

- 忘记说明 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$ 这个假设。若对方向没有任何先验概率，这条问题便无法作答。
- 把第一部分的 $\frac{9}{10}$ 套用到整个族群上。这个结果只适用于 Ascii 族人；Biscii 族人同样会两次给出相同的答案，而且每次都如此。
- 以为不论土著是哪一族人，他的三个答案都是独立的。只有在知道他属于哪一族（以及真正的方向）之后，这些答案才是独立的，这就是我们要先取条件的原因。

STEP 之外

这个计算是贝叶斯更新（Bayesian updating）的一个例子：比值 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$ 称为似然比（likelihood ratio）或贝叶斯因子（Bayes factor），用来量度证据有多支持其中一个假设。由于土著属于哪一族是所有答案共有的隐藏变量（hidden variable），这些答案只是条件独立（conditionally independent），看似指向一方的证据，最终可能指向另一方。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）对条件概率以及正是这一类的悖论有非常出色的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。