详细解答

STEP I 1993，第 13 题

力学 • 功与功率

STEP I 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

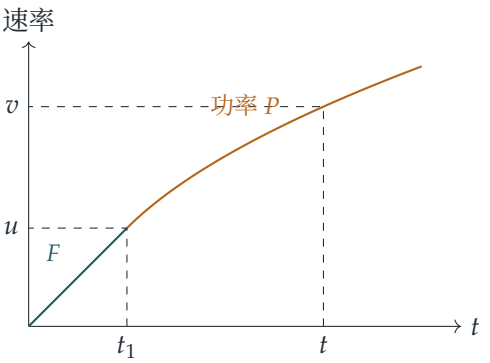
step.maths.org/questions/93-s1-q13

关键思路

运动分为两个阶段，每个阶段要用牛顿第二定律（Newton's second law）的不同形式。当力恒定时，加速度也恒定，所以 *suvat* 方程已足以解决一切。引擎一旦改以恒定功率（constant power）运作，驱动力便是 P/v，它会随速率而改变；诀窍是把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（用来求时间）或 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$（用来求距离），使变量得以分离。

解答

把机车和列车合起来看成一个质量为 M 的质点（particle），沿笔直的水平路轨运动，且不受阻力。水平方向唯一的力是牵引力（tractive force）（重力和法向反作用力（normal reaction）都是垂直方向的，互相抵消）。下图是速率对时间的草图：先是一条直线，升至速率 u，然后是一条曲线，其斜率随速率上升而下降。



第一阶段：恒力

力恒为 F 时，加速度是 F/M。由静止出发，速率达到 u 的时刻是

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

这里用了 $F = P/u$。由 $v^2 = u^2 + 2as$（这里速率由 0 增至 u），所走的距离是

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

第二阶段：恒定功率

功率等于力乘以速度，所以速率为 w 时，牵引力是 P/w。留意当 $w = u$ 时，这个力是 $P/u = F$，所以引擎转换模式时，力不会突然跳变。由牛顿第二定律得

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

时间。 分离变量（separating the variables），得 $Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$。由速率 u、时刻 t_1 积分至速率 v、时刻 t，

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

（这其实就是功能原理（work–energy principle）：引擎所作的功是 $P(t - t_1)$，全部转化为动能（kinetic energy）。）所以

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

正是所求。由于 $v \geq u$，速率 v 是在第二阶段之中（或刚好在其开始的一刻）达到的，所以我们可以使用第二阶段的方程。

> ? **想一想** 求距离时，自变量应该是 x，而不是 t。我们应怎样改写加速度？

由连锁律（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$。于是运动方程变成

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{即} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

距离。 由 $w = u$ 积分至 $w = v$，第二阶段所走的距离 s_2 满足

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P\,s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

因此总距离是

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

试卷上的一处误印。 试卷印出的答案把 u^3 写成了 u^2。这不可能是对的：Mv^3/P 是长度（功率的单位是 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$，而 Mv^3 的单位是 $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$），但 Mu^2/P 却是时间，所以含 u 的一项也必须是三次方，两项才可以相加。正确的距离是 $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$，也就是我们上面证明了的结果。

验算

- 取 $v = u$：时间公式给出 $Mu^2/P = Mu/F$，距离公式给出 $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$，正好是第一阶段的结果，理应如此。
- 单位：Mv^2/P 是能量除以功率，即时间；Mv^3/P 是长度。误印正是这样露出马脚的。
- 取 $M = F = u = 1$（于是 $P = 1$）及 $v = 2$，公式给出 $t = 2.5$，距离为 $17/6 \approx 2.833$。以数值方法逐步模拟这个运动（速率低于某值时力为 F，该值就是 u，高于它时力为 P/w），所得的两个数值都与上述相同；而且对随机选取的 M、F、u 和 $v \geq u$，数值结果与公式的误差小于 10^{-7}；试卷上印有 u^2 的版本则并不吻合。

常见错误

- 忘记第一阶段，直接由静止开始对恒定功率的方程积分。第二阶段的方程只在 $w \geq u$ 时才成立；若由 $w = 0$ 开始使用，就等于说力是无限大。
- 对 x 积分时却用了 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$：求距离时，加速度必须写成 $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。
- 把第一阶段的时间写成 u/F：加速度是 F/M，不是 F。

STEP 之外

恒定功率阶段是一条一阶微分方程（first-order differential equation），以分离变量法求解；而把自变量由 t 换成 x，正是一般能量方法所用的同一诀窍：$w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 积分后得出动能，由此引出功能定理（work–energy theorem），再往后就是位势（potentials）和守恒量（conserved quantities）。低速时力设有上限，也正是现实中牵引的运作方式，因

为功率固定的摩打在静止时不可能提供无限大的力。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是循这个思路阐述功、能量和功率。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。