详细解答

STEP I 1993，第 12 题

力学 · 抛体的拦截

> **STEP I 1993，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

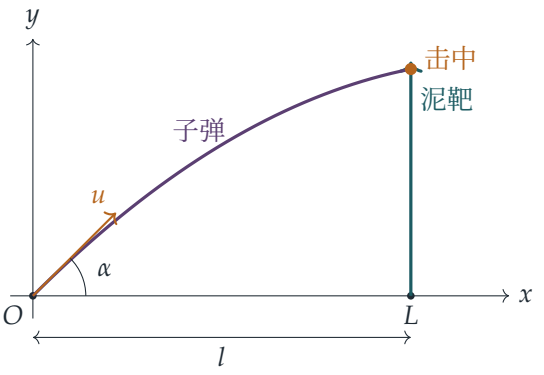
关键思路

击中的意思是子弹与泥靶在同一时刻位于同一位置。子弹到达通过发射器的铅垂线的时刻，只由它的水平运动决定，所以我们先求出这个时刻，再令两者的高度相等。在子弹飞行期间，重力把两个物体向下拉的距离完全相同，都是 $\frac{1}{2}gt^2$，因此这一项互相抵消，剩下一个简洁的线性条件。当 $T = 0$ 时，这个抵消更让我们可以用一个巧妙的角度看通整道题。

解答

模型

我们把泥靶和子弹都看成只在重力作用下自由运动的质点（particle），不计空气阻力（air resistance），并假设参赛者在包含发射器的铅垂平面内朝发射器的方向射击。把参赛者放在原点 O，x 轴水平指向位于 $x = l$ 的发射器 L，y 轴铅垂向上。时间 t 由步枪发射的一刻起计，所以泥靶此时已在空中飞行了时间 T，而在时刻 t 它已飞行了 $T + t$。



击中的条件

发射后的时刻 t，子弹位于

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而泥靶在时间 T 之前以速率 v 向上射出，此时位于 $x = l$，高度为

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

子弹只可能在直线 $x = l$ 上与泥靶相遇，而它到达该处时 $(u\cos\alpha)\,t = l$，即

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

（这里 $\cos\alpha > 0$：由于 $l > 0$，枪口垂直向上的步枪永远打不到发射器那边。）要击中，就需要在这一刻有 $y_B = y_C$。两边的 $-\frac{1}{2}gt^2$ 项互相抵消，所以

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

代入 $t = l/(u\cos\alpha)$ 得

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v - gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

再把全式乘以 $\cos\alpha$，

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v - gT}{u}\,l,$$

这就是所要求的结果。

$T = 0$ 的情况

当 $T = 0$ 时，条件变成 $l\sin\alpha = vl/u$，而由于 $l > 0$，

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

想一想 为甚么这必然导致 $v < u$，而不只是 $v \le u$?

我们需要 $\sin\alpha \le 1$，所以 $v \le u$。但 $v = u$ 就需要 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，这时 $\cos\alpha = 0$：子弹从 O 垂直向上飞，永远到不了直线 $x = l$。所以只有当 $v < u$ 时才可能击中。这时

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，故取正根，而击中发生于

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

泥靶由 $t = 0$ 起在空中，直至 $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 再次成立为止，即直至 $t = 2v/g$。因此，要在它落地之前击中它，就需要

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

其中我们乘上了正数 $\sqrt{u^2 - v^2}$。连同 $v < u$，这正是我们要证明的结论。

$T = 0$ 的情况有一个很漂亮的看法。当 $\sin\alpha = v/u$ 时，子弹速度的铅垂分量是 $u\sin\alpha = v$，与泥靶的相同，而两者所受的重力也一样。所以子弹和泥靶*在每一瞬间都处于同一高度*，唯一的问题是：子弹的水平速率 $\sqrt{u^2 - v^2}$ 能否在泥靶落下之前走完距离 l。

验算

- *无重力的极限情况*。若 $g = 0$ 且 $T = 0$，两个物体都沿直线运动，而条件 $\sin\alpha = v/u$ 正是匀速拦截时常见的“提前量”瞄准条件。
- *最大射程*。对固定的 u，上界 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$ 在 $v = u/\sqrt{2}$ 时最大，其值为 u^2/g，即以速率 u 发射的抛体（projectile）的最大射程。这是合理的：当 $v = u/\sqrt{2}$ 时我们得到 $\alpha = 45°$，而击中恰好发生在子弹本应落回地面的一刻。
- *数值*。取 $g = 9.8$、$v = 20$、$T = 0.7$、$u = 120$ 及 $l = 60$（国际单位制），用数值方法解出击中所需的角度，得 $\alpha \approx 0.2987$ rad，而第一条恒等式的两边相符。把两个运动按时间逐步推算，子弹到达发射器时，子弹和泥靶的高度都是 17.13 m。对于 $T = 0$、$v = 20$ 及 $u = 100$，上界约为 400 m，而 $\alpha \approx 11.5°$。

常见错误

- 对两个物体使用同一个时间变量，却没有考虑延迟 T：泥靶的高度必须用 $T + t$ 计算。
- 忘记排除 $v = u$ 的情况，这时 $\alpha = 90°$，根本不可能击中。
- 只检查子弹能否到达发射器，却没有检查那一刻泥靶是否仍在空中。

STEP 之外

$\frac{1}{2}gt^2$ 的抵消，其实是一个深刻思想的特例：在以加速度 g 自由下落的参考系（frame）中，重力消失了，每个抛体都以恒定速度沿直线运动。这是把伽利略相对性（Galilean relativity）应用于加速参考系，而到了爱因斯坦（Einstein）手中，它成为广义相对论（general relativity）核心的等效原理（equivalence principle）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对相对运动和非惯性参考系（non-inertial frames）有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。