详细解答

STEP I 1993，第 11 题

力学 • 质心

> **STEP I 1993，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

关键思路

一个刚体（rigid body）从一点自由悬挂时，只受两个力作用：支承点的拉力和它本身的重量。两个力要互相平衡，必须作用在同一直线上，所以质心（centre of mass）必定悬在支承点的正下方。因此，整个问题归结为求出弯曲铁线的质心 G，然后留意到：在两个位置之间，物体转过的角度正是直线 GA 与 GB 之间的夹角。

解答

质心

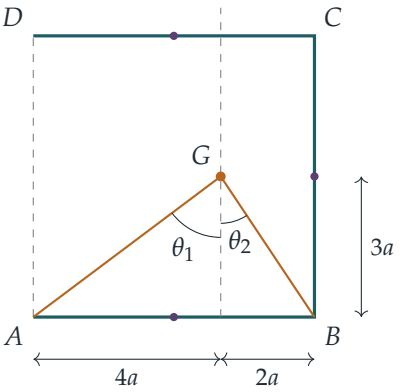
把铁线看成一根均匀的刚性幼棒，弯成 AB、BC、CD 三条边，每条边的重量同为 W，并挂在一口光滑的钉上或一条轻绳上。为了使数字都是整数，取正方形的边长为 $6a$，并在铁线所在的平面上建立坐标轴，使得

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

每条边都是均匀的幼棒，所以它的重量作用在中点：AB 的是 $(3a,0)$，BC 的是 $(6a,3a)$，CD 的是 $(3a,6a)$。三个重量相等，所以 G 就是三个中点的平均：

$$G = \left(\frac{3a+6a+3a}{3}, \frac{0+3a+6a}{3}\right) = (4a,\ 3a).$$

（铁线对称于通过 BC 和 AD 两个中点的直线，因此 G 必定位于高度 $3a$ 处；需要计算的只有它的水平位置。）



图中通过 G 的垂直虚线与 BC 平行（亦与缺少了的边 AD 平行）。设 θ_1 为 GA 与这条虚线所成的角，θ_2 为 GB 在另一侧与它所成的角。从图中可以看出，

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

（事实上 $AG = 5a$：这是一个 3–4–5 三角形。）

先从 A 悬挂，再从 B 悬挂

当铁线从 A 悬挂并处于平衡（equilibrium）时，作用在它上面的力只有 A 处的反作用力（reaction），以及作用在 G 的总重量 $3W$。要使两者平衡，它们对 A 的力矩（moment）必须互相抵消，所以重量的作用线必须通过 A：直线 AG 是垂直的，而 G 在 A 的下方。由于 BC 与图中的虚线平行，此时 BC 与垂直方向成 θ_1 的倾角。

同样地，当铁线从 B 悬挂时，直线 BG 是垂直的，而 BC 则向另一边倾斜，与垂直方向成 θ_2 的倾角。

? **想一想** 为甚么 BC 的两个方向之间的夹角是 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $\theta_1 - \theta_2$?

从第一个位置转到第二个位置时，铁线是整体刚性地转动的，所以它上面的每一条直线都转过相同的角度。换一个说法：让铁线在纸上固定不动，改为让“向下”的方向转动。在第一个位置，向下的方向沿着 GA；在第二个位置，则沿着 GB。因此转过的角度就是两者之间的夹角 AGB。在图中，A 和 B 分别位于通过 G 的虚线的两侧，所以

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

利用复角公式（addition formula），

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{2}{\frac{1}{9}} = 18.$$

θ_1 和 θ_2 都是锐角，所以 $0 < \theta_1 + \theta_2 < 180°$；又因为它的正切是正数，这个和其实是锐角。因此 BC 的两个方向之间的夹角是 $\tan^{-1} 18$，正如题目所求。

验算

- 以数值计算，$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53.13^\circ$，$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 33.69^\circ$，两者相加得 86.82°，而 $\tan^{-1} 18 \approx 86.82^\circ$ 亦然。
- 把铁线换成 90 000 小段相等的部分，把它们的位置取平均而得 $G = (4a, 3a)$，然后每次把整个物体旋转，使 G 位于支承点下方，所得 BC 的两个像之间的夹角与上述结果相同，准确至小数点后九位。
- 检查 G 是否合理：它较接近 BC，而离缺少了的边 AD 较远，这是理所当然的，因为右边有一整条边的铁线，左边却完全没有。

常见错误

- 把 G 取在正方形的中心 $(3a, 3a)$。如果四条边齐全，这是对的；但边 AD 并不存在，没有东西把质心拉向左边。
- 把两个倾角相减而不是相加：从 A 悬挂时 BC 向一边倾斜，从 B 悬挂时则向另一边倾斜。

STEP 之外

“自由悬挂的物体静止时，质心位于支承点的下方”这个原理，正是实际上找出不规则平面图形质心的方法：把它先后从两点悬挂，看看两条铅垂线在哪里相交。在大学一年级的课程中，同一个想法会以势能（potential energy）的形式出现：平衡位置就是 G 的高度的驻点（stationary point），而稳定的平衡位置就是最低的那一个。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）讨论质心和刚体静力学（statics），当中还有更多类似的例子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。