详细解答

STEP I 1993，第 10 题

力学 · 涉及弹簧的平衡

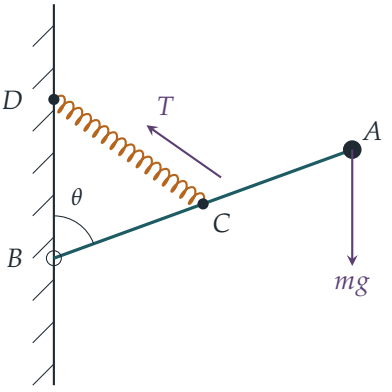
> **STEP I 1993，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q10

关键思路

对铰链 B 取力矩（moments）：这样可以完全消去 B 处未知的反作用力，只留下一条把弹簧张力与杆的角度联系起来的方程。这里的几何其实比表面看来容易处理，因为 $BD = BC = a$，所以三角形 BCD 是等腰三角形，当中每一个长度都可以用 B 处角度的一半来表示。

解答

我们把灯看成质点（particle），把杆看成轻而刚硬，把 B 处的铰链（hinge）看成光滑，并把弹簧看成轻而且遵从胡克定律（Hooke's law）。设 $\theta = \angle DBA$，即杆与向上的铅垂线 BD 之间的夹角。“离开墙壁”的意思是 $0 < \theta < \pi$：当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时，杆贴着墙壁。



弹簧的长度

由于 $BC = BD = a$，而两者之间的夹角是 θ，三角形 BCD 是等腰三角形。由 B 向 CD 作垂线，这条垂线既平分角 θ，亦平分边 CD，所以

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{由 } B \text{ 到直线 } CD \text{ 的距离} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

根据胡克定律，弹簧的张力（tension）为

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right),$$

其中 T 若为负数，即表示弹簧受压缩并向外推。

对 B 取力矩

作用于“杆连灯”这个系统的力有：在 A 的重量 mg、在 C 沿 CD 方向的弹簧力 T，以及在 B 的反作用力（reaction），而后者对 B 没有力矩。重量沿铅垂方向作用，与墙壁的水平距离为 $2a\sin\theta$，它使杆向下转动（令 θ 增大）。张力则把 C 拉向 D，使杆转回墙壁的方向。要达至平衡（equilibrium），须有

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时，我们有 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，所以可以把它约去：

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

特别地，$T > 0$：弹簧必定被拉长，这合乎常理，因为总要有东西把灯撑起来。

> **想一想** 现在我们有两条关于 T 的表达式。把两者相等会得到甚么？所得的答案必须符合甚么条件，才能描述杆的一个真实位置？

记 $s = \sin\frac{\theta}{2}$。把 T 的两条表达式相等，

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)},$$

前提是 $\lambda \neq 2mg$（若 $\lambda = 2mg$，方程便变成 $0 = \lambda$，这是不可能的）。由于 $0 < \theta < \pi$，真实的位置需要满足 $0 < s < 1$。

- 若 $\lambda < 2mg$，则 $s < 0$：无解。
- 若 $\lambda > 2mg$，则 $s > 0$，而且

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

所以当 $\lambda > 4mg$ 时，数值 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$ 严格介乎 0 与 1 之间，从而在 $\theta \in (0, \pi)$ 内恰好有一个角度使力矩平衡。（事实上 $s > \frac{1}{2}$，所以弹簧确实是被拉长的。）这时合力由 B 处的反作用力承受，所以灯可以离开墙壁悬挂而处于平衡，正如题目所要求。反过来说，若 $\lambda \le 4mg$，则没有这样的位置。

该角度为

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right),$$

或者等价地，由于 $\cos\theta = 1 - 2s^2$，

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}.$$

验算

- 当 $\lambda \to \infty$ 时，弹簧无法伸长，所以 $CD \to a$，三角形 BCD 变成等边三角形。公式给出 $s \to \frac{1}{2}$，所以 $\theta \to 60°$。✓
- 当 $\lambda \to 4mg$ 由上方趋近时，$s \to 1$ 而 $\theta \to 180°$：弹簧太弱，灯一直下沉，最后贴着墙壁悬挂。
- 取 $\lambda = 6mg$：$s = \frac{3}{4}$，$\cos\theta = -\frac{1}{8}$，所以 $\theta \approx 97.2°$。把这个角度代入完整的向量力矩方程（弹簧力由坐标计算），所得净力矩为零。在 $0 < \theta < \pi$ 的范围内对净力矩作数值扫描，当 $\lambda > 4mg$ 时只找到一个根（例如 $\lambda = 5mg$ 时为 112.9°），而当 $\lambda \le 4mg$ 时则没有根。

常见错误

- 以整条杆的长度 $2a$，而不是 a，来计算由 B 到弹簧力作用线的距离。垂直距离是 $a\cos\frac{\theta}{2}$。
- 分解力而不取力矩：这样会引入 B 处反作用力的两个未知分量，却毫无得益。
- 忘记检查 $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$，而条件 $\lambda > 4mg$ 正正是由此而来。

STEP 之外

这道题只问平衡是否存在。顺理成章的下一个问题是：这个平衡是否稳定？轻轻一碰之后，扰动会逐渐消失还是愈来愈大？要回答这个问题，可以写出势能（potential energy）$V(\theta)$（重力势能加弹性势能），再考察 $V''(\theta)$ 在平衡位置的正负号；这个想法贯穿大学一年级的力学，其后更贯穿整个动力系统（dynamical systems）理论。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对能量方法和稳定性有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。