详细解答

STEP I 1993，第 1 题

纯数学 · 骰子点数总和的计数

> **STEP I 1993，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

本题在 *Beyond STEP* 第 9.6 节奇怪的骰子中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/strange-dice.html

关键思路

每一面的颜色都不同，所以掷出某个总和的一种“方法”，就是从每颗骰子各选一面。若其中一颗骰子有 a_k 面标着 k，另一颗有 b_k 面，则掷出总和 n 的方法数目为

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

在第二部分，我们由最小的总和开始，顺着往上读表。每个新的总和只会带来一两个未见过的未知数，所以各个点数的面数会逐一被确定下来，我们只需排除途中出现的少数几个分支。

解答

总和为 6 的情况

第一颗骰子的面数为 $a_1 = 1$、$a_2 = 2$、$a_3 = 2$、$a_6 = 1$。第二颗的面数为 $b_1 = 1$、$b_3 = 2$、$b_4 = 1$、$b_5 = 1$、$b_6 = 1$。要得到总和 6，第一颗骰子须掷出 1、2 或 3；若掷出 6，第二颗骰子便要有 0 才行。所以

$$N(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7,$$

这正是题目要求的七种方法。

找出新的编号方式

把两颗骰子称为 P 和 Q。设 P 有 a_k 面标着 k，Q 有 b_k 面，其中 $k = 1, \ldots, 6$。这些都是非负整数，并且

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

（作为简单的核对，表中各项加起来是 $36 = 6 \times 6$。）

总和 2 和 3。 $N(2) = a_1 b_1 = 0$,所以两颗骰子不可能同时有 1。但 $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$，所以总有一颗骰子有 1。把这颗骰子称为 P。于是 $a_1 \geq 1$ 而 $b_1 = 0$，并且

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{所以} \qquad (a_1, b_2) = (2,1) \text{ 或 } (1,2).$$

$a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情况不可能成立。 由于 Q 没有 1，$N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$，而由 $N(7) = 3$ 可得 $b_6 \leq 1$。在这个情况下，Q 有一面标着 2，我们来验证它没有 3 或 4：

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$，所以 $2b_3 \leq 1$，这迫使 $b_3 = 0$，继而 $a_2 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$，所以 $b_4 = 0$ 而 $a_3 = 1$。

因此 Q 有一个 2，没有 1、3 或 4，其余五面都是 5 和 6：$b_5 + b_6 = 5$。由于 $b_6 \leq 1$，可得 $b_5 \geq 4$，于是

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

这与 $N(6) = 4$ 矛盾。所以这个情况不可能出现。

所以 $a_1 = 1$ 而 $b_2 = 2$。 现在我们顺着表往上推，并记住 $b_1 = 0$。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$。由于 $2a_2$ 是偶数，$a_2 = 0$ 而 $b_3 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$。同理，$a_3 = 0$ 而 $b_4 = 1$。
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$。

到目前为止，Q 已确定了 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ 面，所以 $b_5 + b_6 = 2$。由 $b_5 = 4 - 2a_4$ 可知 b_5 是偶数，所以 $b_5 = 0$ 或 $b_5 = 2$。

? **想一想** 我们怎样在 $b_5 = 0$ 与 $b_5 = 2$ 之间作出取舍?

我们利用下一个总和。P 没有 2 或 3，而 Q 没有 1，所以

$$N(7) = a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- 若 $b_5 = 0$，则 $a_4 = 2$ 而 $b_6 = 2$。这时 $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$，这是不可能的。

- 若 $b_5 = 2$，则 $a_4 = 1$ 而 $b_6 = 0$。这时由 $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$ 得 $a_5 = 1$。P 已确定了 $a_1 + a_4 + a_5 = 3$ 面，所以 $a_6 = 3$。

这个表已把一切都确定下来：

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

核对表中其余各项。 我们只用了总和 2 至 7，所以仍须确认这个编号方式能给出其余各项。取 $a_1 = a_4 = a_5 = 1$、$a_6 = 3$ 以及 $b_2 = 2$、$b_3 = b_4 = 1$、$b_5 = 2$：

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

以上全部与表相符。所以两颗骰子的编号必定是 $1,4,5,6,6,6$ 和 $2,2,3,4,5,5$，而这个编号方式确实能给出该表。除了把两颗骰子的名称对调之外，这是唯一可行的编号方式。

验算

- 画出 $1,4,5,6,6,6$ 对 $2,2,3,4,5,5$ 的 6×6 总和方格表，数一数每个总和出现的次数。你应该得到 $0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0$。
- 用电脑搜索以 1 至 6 为两颗骰子编号的所有方式（每颗骰子有 462 个多重集（multiset）），结果恰好只找到这一对，别无其他，这确认了解是唯一的。

常见错误

- 猜出一个符合该表的编号方式便停下来。题目要求的是推理，所以你需要证明该表迫使编号只能如此。
- 忘记了 $a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情况，或者没有给出理由便把它排除。
- 由较小的总和确定了各点数的面数后，却始终没有核对总和 8 至 12。

STEP 之外

要把 $N(n)$ 包装得简洁俐落，可以用生成函数（generating function）。若 $p(x) = \sum a_k x^k$ 而 $q(x) = \sum b_k x^k$，则 $p(x)q(x)$ 中 x^n 的系数正好是 $N(n)$，所以这道题其实是要你把一

个给定的多项式（polynomial）因式分解成两个具有特定形状的因式。同样的想法可以得出 *Sicherman* 骰子（Sicherman dice），即 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$，它们的总和分布与两颗普通骰子相同。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology* 是介绍这个方法的一本生动入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。