详细解答

STEP III 1992，第 9 题

纯数学 · 椭圆的极坐标方程

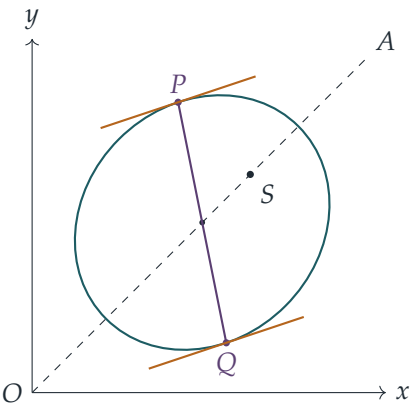
STEP III 1992，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s3-q9

关键思路

极坐标（polar coordinates）以 S 为极点量度，始线沿 $y = x$ 的方向，因此极角为 θ 的点，从 S 看去在直角坐标（Cartesian coordinates）中的方向角是 $\theta + \frac{\pi}{4}$。把 x 和 y 写成 θ 的函数再求导，便得到斜率（gradient）。至于第二部分，直径（diameter）真正用得上的性质，是椭圆（ellipse）关于其中心对称：直径两端的切线（tangent）互相平行。于是我们令两个斜率相等，余下的工夫交给半角三角公式便可。



在草图中（$e = \frac{1}{2}$），PQ 是通过中心的直径，而 P 和 Q 处的切线互相平行。

解答

切线的斜率

由于 S 位于第一象限内的直线 $y = x$ 上，设 S 为点 (s, s)，其中 $s > 0$。沿 SA 方向的单位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，与 x 轴成 $\frac{\pi}{4}$ 角。所以，以 S 为极点、极坐标为 (r,θ) 的点是

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{其中}\phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

在 E 上有 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

以 r' 表示 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，并利用 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

我们只关心两者之比，所以把两式同乘以正数 $(1 + e\cos\theta)/r$：

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

这是因为 $\theta - \phi = -\frac{\pi}{4}$。现在 $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$，而 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)$。全式乘以 $\sqrt{2}$，可知在 $\theta = \alpha$ 处的一个切向量（tangent vector）是

$$\mathbf{d}(\alpha) = (-(\sin\alpha + \cos\alpha + e),\ \cos\alpha - \sin\alpha + e). \qquad (*)$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + e}{-(\sin\alpha + \cos\alpha + e)} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - e}{\sin\alpha + \cos\alpha + e},$$

正是所求。（当 $\sin\alpha + \cos\alpha + e = 0$ 时，切线是铅垂的；$(*)$ 在该处依然成立。）

直径的两端

> **想一想** 我们还未求出中心，怎样才能把“PQ 通过中心”化为一条关于 α 和 β 的方程?

我们利用第一部分的结果。椭圆绕其中心 C 旋转半周（half-turn）后与自身重合。若 P 和 Q 是一条直径的两端，这个半周旋转会把两点互换，并把 P 处的切线映射到 Q 处的切线。半周旋转把每条直线都变成与之平行的直线，所以*P 和 Q 处的切线互相平行。*

因此，设 P 处 $\theta = \alpha$，Q 处 $\theta = \beta$，则由 $(*)$ 得出的向量 $\mathbf{d}(\alpha)$ 和 $\mathbf{d}(\beta)$ 互相平行。用向量而不用斜率来处理，即使切线是铅垂的，我们也永远不会除以零。记 $s_\alpha = \sin\alpha$，$c_\alpha = \cos\alpha$，余此类推。平行的条件是

$$(s_\alpha + c_\alpha + e)(c_\beta - s_\beta + e) = (s_\beta + c_\beta + e)(c_\alpha - s_\alpha + e).$$

展开后，$c_\alpha c_\beta$、$-s_\alpha s_\beta$、ec_α、ec_β 和 e^2 各项在等号两边都出现，互相抵消，剩下

$$s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta + es_\alpha - es_\beta = s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha + es_\beta - es_\alpha,$$

亦即

$$\sin(\alpha-\beta) + e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

现在利用 $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 和 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$：

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

想一想 我们可以约去 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 吗?

可以。P 和 Q 是不同的点，所以 α 与 β 之差不是 2π 的倍数，故 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$。因此

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

以 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\beta}{2}$ 展开：

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.$$

除以 $(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$（因为 E 是椭圆，所以这里 $1-e>0$），得

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2} = -\frac{1+e}{1-e},$$

正是所求。除非 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 或 $\cos\frac{\beta}{2}$ 等于零，否则这一步除法是成立的。假如（例如）$\alpha=\pi$，方程便迫使 $\sin\frac{\beta}{2}=0$，所以 $\beta=0$。这条直径就是沿 OSA 的长轴（major axis），此时两个正切之积没有定义。其余每一条直径都满足这个结果。

验算

- 在 $\alpha=0$（较接近 S 的顶点）处，公式给出斜率 $\frac{-1-e}{1+e} = -1$。这是对的：长轴端点处的切线与 $y=x$ 垂直。
- 当 $e=\frac{1}{2}$ 时，乘积应为 -3。取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}=1$。于是 $\tan\frac{\beta}{2}=-3$，所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ 而 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$。由 $(*)$ 得 $\mathbf{d}(\alpha)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ 和 $\mathbf{d}(\beta)=(\frac{9}{10},\frac{3}{10})$，两者互相平行。✓
- 数值上，随机选取 2000 组 ℓ、e、S 和 α，斜率公式都与以有限差分（finite difference）计算的导数吻合；而把 P 对中心（位于从 S 沿 AS 方向距离 $\ell e/(1-e^2)$ 之处）作反射，所得的点 Q 在 E 上，其 β 满足该恒等式，误差在 10^{-13} 以内。

常见错误

- 忘记了 $\frac{\pi}{4}$ 的旋转而使用 $x = r\cos\theta$，这样得出的是另一个坐标系中的斜率，并不是题目所求。
- 除以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 而没有说明它为何不等于零。
- 试图先求出中心，再直接加上“C 是 PQ 的中点”这个条件。这样做是行得通的，但远比利用平行切线繁复。

STEP 之外

直径两端的切线互相平行，属于*共轭直径*（conjugate diameters）理论的一部分：一族平行弦的中点都落在同一条直径上，而该直径两端的切线与这些弦平行。在一个把椭圆变成圆的仿射映射（affine map）之下，这一切都化为初等的圆几何，这正是仿射几何和射影几何（projective geometry）如此强大的原因之一。这里的半角正切，也是天体力学中描述轨道时所用的标准参数化（parametrisation）。想在大学一年级的程度踏入这门几何，不妨一读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》），或 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题集》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。