详细解答

STEP III 1992，第 8 题

纯数学 · 以方程的根求三角函数之和

STEP III 1992，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s3-q8

关键思路

棣美弗定理（De Moivre's theorem）把 $\sin(2n+1)\theta$ 化为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多项式，再除以 $\sin^{2n+1}\theta$，便得到一个 $\cot^2\theta$ 的多项式。角 $k\pi/(2n+1)$ 令左边等于零，所以它们的余切平方就是一个已知多项式的根。只要知道了全部的根，那三个和其实不过是韦达定理（Vieta's formulas，即根之和与根的倒数之和）换了个样子而已。

解答

恒等式

设 $c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ 及 $N=2n+1$。由棣美弗定理和二项式定理（binomial theorem），

$$\cos N\theta+\mathrm{i}\sin N\theta=(c+\mathrm{i}s)^N=\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

虚数项就是 j 为奇数的那些项。设 $j=2m+1$，则 $\mathrm{i}^{2m+1}=\mathrm{i}(-1)^m$，所以

$$\sin N\theta=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

现在以 $r=n-m$ 把求和的次序倒转。这时 $2m+1=2n+1-2r$，而由二项式系数（binomial coefficients）的对称性，$\binom{2n+1}{2n+1-2r}=\binom{2n+1}{2r}$。因此

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\&=\sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

当中抽出了 s^{2n+1}，并用了 $c^{2r}/s^{2r}=\cot^{2r}\theta$。只要 $\sin\theta\neq0$，此式便成立，正如题目所求。

多项式的根

设

$$p(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{2n+1}{2r}x^r,$$

并对 $k=1,\dots,n$ 取 $\theta_k=k\pi/(2n+1)$。于是 $(2n+1)\theta_k=k\pi$，所以 $\sin(2n+1)\theta_k=0$，而 $0<\theta_k<\pi/2$ 则保证 $\sin\theta_k\neq 0$。把恒等式除以 $\sin^{2n+1}\theta_k$，再乘以 $(-1)^n$，得

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta_k=0,\qquad \text{即}\qquad p(\cot^2\theta_k)=0.$$

想一想 我们怎样知道这些就是全部的根？下面的求和全靠这一点。

角 $\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n$ 全都位于 $(0,\pi/2)$ 之内，而 cot 在这个区间上为正，并且严格递减（strictly decreasing）。所以这 n 个数 $\cot^2\theta_k$ 互不相同。p 的首项系数（leading coefficient）是 $(-1)^n\binom{2n+1}{2n}=(-1)^n(2n+1)\neq 0$，所以 p 的次数恰好是 n，因而最多有 n 个根。由此可知，$p(x)=0$ 的根恰好就是 $\cot^2\theta_k$（$k=1,\dots,n$），而且每个都是单根（simple root）。

我们需要的系数是

$$[x^n]:\ (-1)^n\binom{2n+1}{2n}=(-1)^n(2n+1),$$
$$[x^{n-1}]:\ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2}=(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},$$
$$[x^1]:\ -\binom{2n+1}{2}=-n(2n+1),\qquad [x^0]:\ 1.$$

第 (i) 部分

根之和等于 x^{n-1} 与 x^n 的系数之比的相反数：

$$\sum_{k=1}^{n}\cot^2\theta_k=-\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

第 (ii) 部分

由于 $\tan^2\theta_k=1/\cot^2\theta_k$，我们要求的是各根 x_k 的倒数之和。这些根全都不是零（常数项是 1），而

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=\frac{\sum_k\prod_{j\neq k}x_j}{\prod_k x_k},$$

根据韦达定理，其分子和分母分别是 $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$ 和 $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$。两者之比是 $-[x^1]/[x^0]$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\theta_k=-\frac{-n(2n+1)}{1}=n(2n+1).$$

（换个说法：倒数 $1/x_k$ 是 $x^n p(1/x)$ 的根，也就是把系数次序倒转后所得的多项式的根，我们只须读出它的根之和。）

第 (iii) 部分

利用 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ 和第 (i) 部分，

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{3n+2n^2-n}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

验算

当 $n=1$ 时，多项式是 $1-3x$，它的根是 $\frac{1}{3} = \cot^2(\pi/3)$。这时 (i) 给出 $\frac{1}{3}$，(ii) 给出 $3 = \tan^2(\pi/3)$，(iii) 给出 $\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2(\pi/3)$，全部正确。当 $n=3$ 时，各角是 $\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$，用计算机算得三个和分别是 5、21 和 8，与 $\frac{3\cdot5}{3}$、$3\cdot7$ 和 $\frac{2\cdot3\cdot4}{3}$ 吻合。我们还以数值方法，就随机选取的 θ 和 n 验证了恒等式，并就 $n \le 29$ 验证了全部三个和。

常见错误

- 忘记论证各个 $\cot^2\theta_k$ 互不相同，以及 p 的次数恰好是 n。缺了这一步，便不能把韦达定理用在 $\cot^2\theta_k$ 上。
- 系数的正负号出错：因子 $(-1)^n$ 在第 (i) 部分会约去，但前提是两个系数都带有这个因子。
- 把 k 一直取到 $2n$：当 $k > n$ 时，角 $k\pi/(2n+1)$ 只会重复相同的 $\cot^2$ 值，所以只有 $k \le n$ 才给出互不相同的根。

STEP 之外

把第 (iii) 部分与 $0 < \theta < \pi/2$ 时成立的不等式 $\cot^2\theta < 1/\theta^2 < \operatorname{cosec}^2\theta$ 结合起来，便可把 $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ 夹在这里求得的两个和的倍数之间。令 $n \to \infty$，就得到欧拉（Euler）的著名结果 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$；这是一个漂亮的初等证明，大学一年级的分析（analysis）课程经常介绍。从多项式的系数读出各种和，这个想法同样是对称函数（symmetric functions）和牛顿恒等式（Newton's identities）的基础。分析方面，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。