详细解答

STEP III 1992，第 7 题

纯数学 · 向量几何

STEP III 1992，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s3-q7

关键思路

题目中的一切都由平行四边形（parallelogram）以及按给定比例分割各边的点构成，而这正是位置向量（position vector）最擅长处理的情况。把原点设在 A，并用两个边向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示每一个点。然后求出其中两条直线的交点，再验证这个点位于第三条直线上。

解答

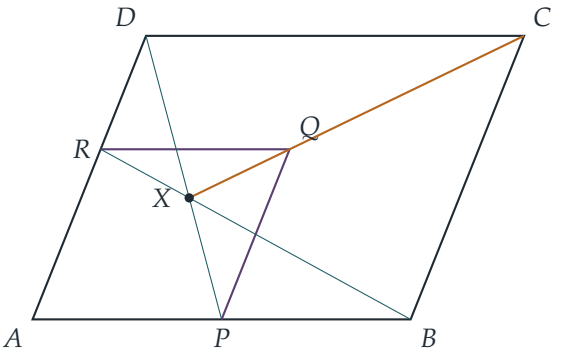
取 A 为原点，并设 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$，$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$。由于 $ABCD$ 是一个真正的平行四边形，这两个向量并不平行。因此平面上每一点都可以写成 $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$，其中实数对 (λ, μ) 恰好只有一组，于是我们可以比较系数（compare coefficients）。

由于 $ABCD$ 是平行四边形，C 的位置向量是 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$。因为 P 在边 AB 上，而 R 在边 AD 上，我们可以写成

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

由于 $APQR$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$，所以

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$



BR 与 DP 的交点

直线 BR 上的一般点是

$$\mathbf{b} + s(r\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (1 - s)\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d},$$

而直线 DP 上的一般点是

$$\mathbf{d} + t(p\mathbf{b} - \mathbf{d}) = tp\,\mathbf{b} + (1 - t)\,\mathbf{d}.$$

在公共点上，$\mathbf{b}$ 的系数和 $\mathbf{d}$ 的系数必须分别相等：

$$1 - s = tp, \qquad sr = 1 - t.$$

把 $s = 1 - tp$ 代入第二条方程，得 $r - rpt = 1 - t$，所以 $t(1 - pr) = 1 - r$。

想一想 我们可以除以 $1 - pr$ 吗?

由于 $0 \le p, r \le 1$，只有当 $p = r = 1$ 时才有 $pr = 1$，即 $P = B$ 且 $R = D$ 的情况。这时 $Q = C$，“直线” CQ 没有定义，也就没有甚么需要证明。因此我们排除这个情况，于是 $1 - pr > 0$。这亦说明 BR 与 DP 并不平行，所以它们恰好相交于一点。于是

$$t = \frac{1 - r}{1 - pr}, \qquad s = 1 - tp = \frac{1 - pr - p + pr}{1 - pr} = \frac{1 - p}{1 - pr},$$

而交点 X 是

$$\mathbf{x} = tp\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d} = \frac{p(1 - r)\,\mathbf{b} + r(1 - p)\,\mathbf{d}}{1 - pr}.$$

X 位于 CQ 上

直线 CQ 上的一般点是

$$\mathbf{c} + u(\mathbf{q} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + u((p - 1)\mathbf{b} + (r - 1)\mathbf{d}) = (1 - u(1 - p))\mathbf{b} + (1 - u(1 - r))\mathbf{d}.$$

试取 $u = \dfrac{1}{1-pr}$。**b** 的系数变成

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

而 **d** 的系数变成

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

这正好就是 **x** 的系数。所以 X 也位于 CQ 上，三条直线 BR、CQ 和 DP 都通过 X。它们交于一点，正如所求。 ■

（当中的对称性令人放心：把 B, P, p 与 D, R, r 的角色互换，BR 与 DP 便会互换，CQ 保持不变，而 **x** 的公式亦不变。）

验算

- 若 $P = A$（$p = 0$），则 $Q = R$，而 $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$，即是 R。事实上，DP 就是直线 DA，它与 BR 交于 R；而 CQ 就是 CR，它通过 R。
- 若 P 和 R 分别是 AB 和 AD 的中点，则 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$，位于由 A 到 C 的三分之一处。这是三角形 ABD 的形心（centroid），理应如此，因为 BR 和 DP 是它的其中两条中线（median）。
- 我们随机选取了 5000 个平行四边形以及 P 和 R 的随机位置，用分数精确地检验了共点性（concurrency）。每一个情况都与 **x** 的公式吻合。

常见错误

- 忘记了正因为 **b** 与 **d** 不平行，才可以比较这两个系数。
- 两条不同的直线用了同一个参数。每条直线都需要有自己的参数（s、t、u）。
- 没有提及退化情况（degenerate case）$P = B$、$R = D$，这时 $Q = C$，直线 CQ 没有定义。

STEP 之外

留意整个解答从未用过长度或角度，只用了平行线和直线上的比例。因此这个结果属于仿射几何（affine geometry）：仿射映射（affine map，即先作线性映射、再作平移）可以把任何平行四边形变成正方形，同时保持共点性，所以只需就正方形证明这个结果便已足够。关于直线相交的问题在射影几何（projective geometry）中也十分自然，塞瓦

（Ceva）定理和笛沙格（Desargues）定理等都属于这个范畴。如想广泛而轻松地游览这些概念，可参阅考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（几何学入门），或 Brannan、Esplen 与 Gray 的 *Geometry*（几何学）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。