详细解答

STEP III 1992，第 6 题

纯数学 · 三角函数归约公式

> **STEP III 1992，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

关键思路

两个化简都建基于同一做法：把三角函数之差化为含有因子 $\sin x$ 的乘积，从而约去碍事的分母。对 I_n 而言，所用的工具是 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$；对 J_n 而言，则是 $\sin P - \sin Q$ 的和差化积公式（sum-to-product formula）。分母一旦消去，余下的只是初等积分，而两条递推公式（reduction formula）亦可裂项相消（telescope）。

解答

先谈谈被积函数（integrand）。两者的分母都有 $\sin x$，它在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 处为零，但这些奇点是可去奇点（removable singularity）：由于当 $x \to 0$ 时 $\sin(nx)/\sin x \to n$，而当 $x \to \pi$ 时 $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$，两个被积函数都保持有界。因此下文所有积分都是连续函数的普通积分。

关系式 $I_n - I_{n-1} = J_n$

利用 $\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$ 及和差化积公式，

$$\sin^2 A - \sin^2 B = (2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2})(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

取 $A = nx$ 及 $B = (n-1)x$，便得

$$\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \sin((2n-1)x)\sin x.$$

因此，对 $n \geq 1$，

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

正如所求。（当 $n = 1$ 时，我们把 I_0 理解为 $x \sin^2 0 / \sin^2 x = 0$ 的积分，故 $I_0 = 0$。）

J_n 的递推公式

现在比较 J_{n+1} 与 J_n。由和差化积公式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

于是 $\sin x$ 再次被约去：

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 作分部积分（integration by parts），

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2nx)\Big]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

这是因为对整数 n 有 $\sin(2n\pi) = 0$ 及 $\cos(2n\pi) = 1$。因此递推公式为

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

想一想 一条说 $J_{n+1} = J_n$ 的递推公式，看来简单得令人起疑。这真的是答案吗？

是的：式中出现的 $2\cos(2nx)$ 与 x 相乘后，在整数个周期上的积分为零，所以由一个 n 到下一个，数值毫无改变。要确定这个值，我们只需计算首项：

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

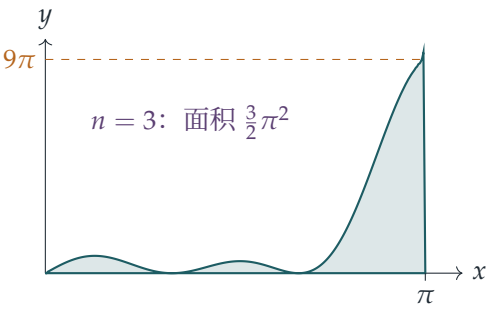
因此对每个正整数 n，都有 $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$。

C 之下的面积

由于在 $(0,\pi)$ 上 $x \geq 0$ 且 $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$，曲线永不低于 x 轴，所以 C 之下的面积正好是 I_n。把第一条关系式求和（各项裂项相消），并利用 $I_0 = 0$，

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

所以 C 之下的面积是 $\frac{1}{2}n\pi^2$，正如所求。



验算

- $n = 1$：曲线是 $y = x$，而该三角形的面积是 $\frac{1}{2}\pi^2$。✓
- 对 $n = 1, \ldots, 8$ 的积分使用辛普森法则(Simpson's rule),每次都得出 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$，又例如 $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$。
- 曲线在 $x = \pi$ 处升至 $y = n^2\pi$，但面积只随 n 线性增长：各个峰愈来愈高，却愈来愈窄（宽度约为 π/n），两者并无矛盾。

常见错误

- 忘记了 $I_0 = 0$（或从未查看 I_0 的意思），以致裂项求和没有起始值。
- 计算 $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 时弄错正负号；较简洁的做法是留意到边界项为零，而余下的 $\sin(2nx)$ 在 $[0, \pi]$ 上的积分亦为零。

STEP 之外

函数 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$ 除了相差一个因子 $1/n$ 之外，就是傅里叶分析（Fourier analysis）中的*费耶核*（*Fejér kernel*），而 $\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$ 基本上就是*狄利克雷核*（*Dirichlet kernel*）。你在这里发现的事实，即它们的积分与 n 无关，而函数本身却集中于区间的两端，正是它们能用来证明傅里叶级数（Fourier series）收敛的原因。Stein 与 Shakarchi 的 *Fourier Analysis: An Introduction*（傅里叶分析入门）对此有精彩的阐述；至于实分析（real analysis）的背景知识，可参看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门读本）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。