详细解答

STEP III 1992，第 5 题

纯数学 · 三维向量几何

> **STEP III 1992，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q5

关键思路

对称性几乎包办了所有工作。以平面 $y+z=2$ 作反射（reflection），四面体（tetrahedron）会映射到自身，而 A 和 D 保持不动，所以这个反射必定把 B 和 C 对调。由此可知 BC 垂直于该平面，而且它的中点（midpoint）N 位于该平面上。之后的一切都只是毕氏定理（Pythagoras）和纯量积（scalar product），当中用到四个顶点与球心 Y 的距离全部相等这一事实。

解答

求 N 和半径

我们有 $\overrightarrow{AY}=(3,-2,4)-(0,4,-2)=(3,-6,6)$，所以球面（sphere）的半径（radius）是

$$YA=\sqrt{9+36+36}=9.$$

由于 $\overrightarrow{AY}=3\overrightarrow{YN}$，可得 $\overrightarrow{YN}=(1,-2,2)$，所以 $N=(4,-4,6)$ 而 $YN=3$。

留意 A、Y 和 N 全部满足 $y+z=2$：三点都位于对称平面（plane of symmetry）上。

为何 BC 垂直于该平面

设 Π 为平面 $y+z=2$。以 Π 作反射会把四面体映射到自身，所以它把各顶点重新排列（permute）。它固定 A 和 D，这两点都在 Π 上。B 和 C 都不在 Π 上：假如其中一点在该平面上，反射便会固定这一点，于是也必须固定第四个顶点，结果四个顶点全部落在 Π 上，根本构不成四面体。因此反射把 B 和 C 对调，即是说 C 是 B 的镜像。由此可知

- BC 垂直于 Π，所以它平行于法向量（normal）$(0,1,1)$；
- BC 的中点 N 位于 Π 上（与我们先前求得的结果吻合）。

> **想一想** 为甚么三角形 YNB 在 N 处成直角？

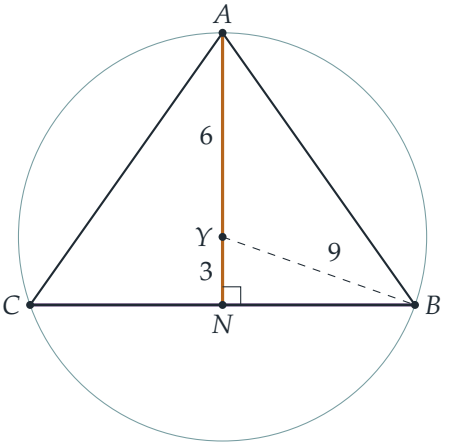
Y 和 N 都在 Π 上，所以 YN 是 Π 上的一条直线。但 NB 沿着 Π 的法线方向。法线垂直于平面上的每一条直线，所以 $\angle YNB = 90°$。

BN 与 B、C 的坐标

B 在球面上，所以 $YB = 9$。在三角形 YNB 中应用毕氏定理，

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{所以} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

正如题目所求。



上图按比例绘出平面 ABC，该平面包含 Y（因为 Y 在 AN 上）。琥珀色的线段 AN 是它与 Π 相交之处；圆则是它截球面所得的截口。

沿 BC 方向的单位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$，所以

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

已知 $N = (4,-4,6)$，这条弦（chord）的两个端点是 $(4,2,12)$ 和 $(4,-10,0)$。所以

$$B = (4,2,12),\ C = (4,-10,0) \qquad \text{或} \qquad B = (4,-10,0),\ C = (4,2,12).$$

验算一下：$(4,2,12) - (3,-2,4) = (1,4,8)$ 的长度是 $\sqrt{1+16+64} = 9$，所以 B 确实在球面上。

D 的坐标

设 $\overrightarrow{YD} = (p, q, r)$。我们有三个条件。

- D 和 Y 都在 Π 上，所以 $\overrightarrow{YD}$ 垂直于法向量 $(0,1,1)$：$q + r = 0$。
- D 在球面上：$p^2 + q^2 + r^2 = 81$。
- 角度条件：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = YA \cdot YD \cos \angle AYD = 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 27$。

> **想一想** 三个未知数、三条方程，但其中一条是二次的。我们预期会有多少个解？

最多两个，因为最后会得到一条二次方程。从几何角度看，D 位于 Π 截球面所得的圆上（这是一个大圆（great circle），因为 $Y \in \Pi$），而该圆上与 YA 成指定角度的点，正是分处 A 两侧、互为镜像的两个位置。

利用 $\overrightarrow{YA} = (-3, 6, -6)$ 和 $r = -q$，角度条件给出

$$-3p + 6q + 6q = 27 \quad \Longrightarrow \quad p = 4q - 9.$$

代入球面方程，并利用 $r^2 = q^2$：

$$\begin{aligned} (4q - 9)^2 + 2q^2 &= 81 \\ 18q^2 - 72q &= 0 \\ 18q(q - 4) &= 0. \end{aligned}$$

- $q = 0$：这时 $p = -9$，$r = 0$，所以 $\overrightarrow{YD} = (-9, 0, 0)$，而 $D = (-6, -2, 4)$。
- $q = 4$：这时 $p = 7$，$r = -4$，所以 $\overrightarrow{YD} = (7, 4, -4)$，而 $D = (10, 2, 0)$。

两者都给出真正的四面体：D 在 Π 上，但不在直线 AN 上（平面 ABC 只有这一部分落在 Π 内），所以 D 不在平面 ABC 上。因此

$$D = (-6, -2, 4) \qquad \text{或} \qquad D = (10, 2, 0).$$

验算

- 每个 D 都满足 $y + z = 2$，而且两种情况下均有 $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$（分别是 81 和 $49 + 16 + 16$）。
- 对于 $D = (10, 2, 0)$：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = -21 + 24 + 24 = 27 = 81 \cdot \frac{1}{3}$。✓
- B 和 C 互为镜像：把 (x, y, z) 以 $y + z = 2$ 作反射，得到 $(x,\ 2 - z,\ 2 - y)$，它把 $(4, 2, 12)$ 送到 $(4, -10, 0)$。

- 用电脑搜索 Π 上坐标不超过 20 的所有整数点，找出位于球面上且满足 $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$ 的点，结果恰好只有 $(-6,-2,4)$ 和 $(10,2,0)$。两种情况下四面体的体积都是 $1728/6 = 288$，所以它并非扁平。

常见错误

- 求错 N。$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$ 表示 Y 位于 AN 的四分之三处，所以 $N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$，而不是 $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$。
- 把 YN 或 AN 当作半径。半径是 $YA = 9$；$YN = 3$ 只是球心到弦 BC 的距离。
- 忘记 D 必须位于 Π 上。少了 $q + r = 0$ 这个条件，可能的点便有整整一个圆那么多。

STEP 之外

“反射必定把 B 和 C 对调”这个论证，其实是群论（group theory）的一小片段：一个图形的对称通过重新排列其顶点来作用，而反射的不动点（fixed point）必定位于镜面上。这个反射本身就是线性代数中的映射 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$，是一个行列式（determinant）为 -1 的正交变换（orthogonal transformation）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 讨论反射和正交矩阵（orthogonal matrix），而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 则阐述对称群（symmetry group）的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。