详细解答

STEP III 1992，第 4 题

纯数学 · 正交轨线

> **STEP III 1992，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

关键思路

把 S_1 的每条曲线写成 $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$：它是一条等轴双曲线（rectangular hyperbola），渐近线（asymptote）为 $x = a$ 和 $y = 1$，而且每一条都通过原点。要找出整个曲线族的微分方程（differential equation），先求导，再利用曲线本身的方程消去 a。两条曲线正交，当且仅当它们的斜率（gradient）之积为 -1，因此把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 换成 $-1/\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，就可以把 S_1 的方程变成 S_2 的方程，而后者可以分离变量（separation of variables）。

解答

S_1 的曲线

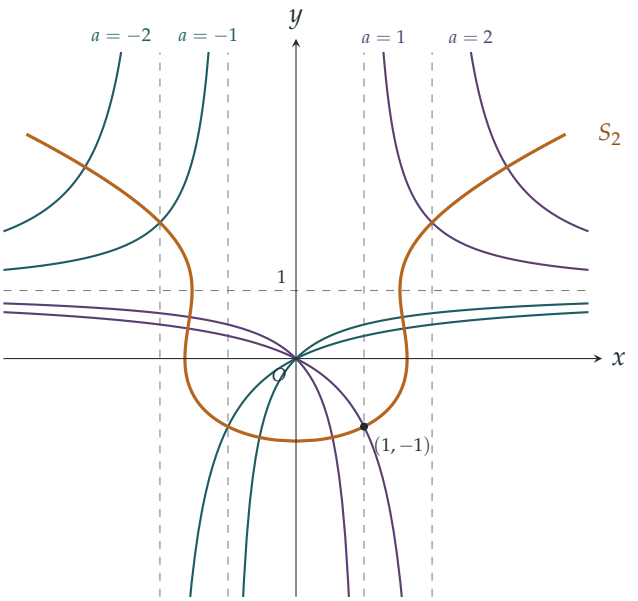
由于 $x = (x-a) + a$，

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

因此当 $a \neq 0$ 时，曲线是一条等轴双曲线，铅垂渐近线为 $x = a$，水平渐近线为 $y = 1$，并且通过原点。

- 若 $a > 0$，斜率恒为负。$x < a$ 的一支从 $y = 1$（当 $x \to -\infty$）向下走，经过 O，并在 $x \to a^-$ 时跌向 $-\infty$；$x > a$ 的一支则从 $+\infty$ 向下趋近 $y = 1$。
- 若 $a < 0$，斜率恒为正。$x > a$ 的一支从 $-\infty$ 上升，经过 O，趋近 $y = 1$；$x < a$ 的一支则位于 $y = 1$ 之上。

把 x 换成 $-x$，$\dfrac{x}{x-a}$ 就变成 $\dfrac{x}{x+a}$，所以对应 $-a$ 的曲线，是对应 a 的曲线沿 y 轴的反射。一个方便描绘的点：当 $x = \dfrac{3}{2}a$ 时，$y = 3$。



虚线是渐近线。琥珀色的曲线是 S_2 中通过 $(1,-1)$ 的那一条，它的形状我们会在下文说明理由。

S_1 的微分方程

由 $y(x-a)=x$ 可得 $x-a=\dfrac{x}{y}$ 及 $a=x-\dfrac{x}{y}=\dfrac{x(y-1)}{y}$。（在 S_1 的曲线上，只有在原点才有 $y=0$，所以在该点以外我们可以除以 y。）代入斜率的式子，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{(x-a)^2}=-\frac{x(y-1)}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2}=-\frac{y(y-1)}{x},$$

所以 S_1 的每一条曲线都满足

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(1-y).$$

S_2 的微分方程

两条曲线正交，当且仅当它们在交点处的斜率之积为 -1。因此，若在某个公共点上 S_1 曲线的斜率为 p_1，S_2 曲线的斜率为 p_2，则 $p_1p_2=-1$，即 $p_1=-1/p_2$。

? **想一想** 刚才求得的方程是关于 S_1 的。为甚么它能告诉我们有关 S_2 的事情?

通过每一点 (x,y)（其中 $x,y\neq 0$）的 S_1 曲线恰好有一条，就是 $a=x(y-1)/y$ 的那一条，而它在该点的斜率为 $-y(y-1)/x$。通过同一点的 S_2 曲线，斜率必须是 $p_2=-1/p_1$，

所以在 S_2 上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{-y(y-1)/x} = \frac{x}{y(y-1)}, \qquad \text{即} \qquad x = y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

正如题目所求。

S_2 中通过 $(1,-1)$ 的曲线

这个方程可以分离变量：

$$\int (y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

在 $(1,-1)$：$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$，所以 $C = -\frac{4}{3}$。两边乘以 6，图中所画的曲线就是

$$3x^2 = 2y^3 - 3y^2 + 8.$$

要描绘这条曲线，设 $g(y) = 2y^3 - 3y^2 + 8$，则 $x = \pm\sqrt{g(y)/3}$，而曲线对称于 y 轴。由于 $g'(y) = 6y(y-1)$，g 有局部极大值（local maximum）$g(0) = 8$ 和局部极小值（local minimum）$g(1) = 7$。两者皆为正数，所以 g 只有一个实零点，位于 -2 与 -1 之间（因为 $g(-2) = -20$，$g(-1) = 3$）；其数值为 $y_0 \approx -1.214$。因此这条曲线：

- 最低点在 $(0, y_0)$，该处 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$；
- 在 $y = 0$（即 $x = \pm\sqrt{8/3} \approx \pm 1.63$）和 $y = 1$（即 $x = \pm\sqrt{7/3} \approx \pm 1.53$）处有铅垂切线，因为在这些位置 $y(y-1) = 0$；
- 在 $y = 0$ 与 $y = 1$ 之间稍微向轴弯回去（当 $x > 0$ 时，斜率 $x/(y(y-1))$ 在那里是负的），然后当 $|x|$ 很大时，大致按 $y \approx (\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$ 增长。

为核对图形，通过 $(1,-1)$ 的 S_1 曲线满足 $-1 = \frac{1}{1-a}$，所以 $a = 2$，在该点的斜率为 -2；S_2 的斜率为 $\frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$，而确实 $(-2)\cdot\frac{1}{2} = -1$。$y = 1$ 处的铅垂切线也合情合理：曲线在那里与 $y = 1$（即 S_1 中 $a = 0$ 的成员）正交。

验算

- 在 $(1,-1)$：$3(1)^2 = 3$，而 $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$。✓
- S_2 的曲线与 $a = 1$ 的曲线相交于 $(2,2)$：在该点 S_1 的斜率为 $-1/(2-1)^2 = -1$，S_2 的斜率为 $2/(2\cdot 1) = 1$，乘积为 -1。
- 以数值方法，我们找出了琥珀色曲线与图中四条双曲线的全部十二个交点（每条三个，例如 $a = -2$ 时的 $(1.5901,\, 0.4429)$），而斜率之积在每个交点都是 -1.00000000。

常见错误

- 微分方程中仍然留有 a：关键正正在于利用 $y = x/(x-a)$ 本身把它消去。
- 用了 $p_2 = -p_1$ 或 $p_2 = 1/p_1$，而不是 $p_1 p_2 = -1$。
- 把 S_2 的曲线画成简单的 U 形：它在 $y = 0$ 和 $y = 1$ 处有铅垂切线，两者之间还有一小段向后弯的部分。

STEP 之外

S_2 的曲线是 S_1 的正交轨线（orthogonal trajectories）。它们在物理学中以场线（field lines）与等势线（equipotentials）相交的形式出现，又或者是流线（streamlines）与等速度势线相交。这里的技巧（消去参数，再把 y' 换成 $-1/y'$）是标准方法，而由此得出的一阶方程，是常微分方程（ODE）入门课程的必备内容；参见 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。