详细解答

STEP III 1992，第 3 题

纯数学 · 曲线与多项式的根

> **STEP III 1992，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q3

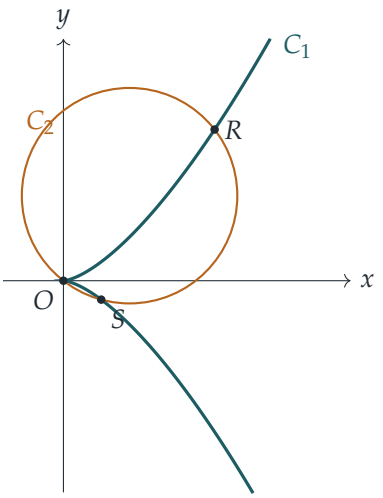
关键思路

把参数化（parametrisation）直接代入通过原点的圆的一般方程。这样会得到一个关于 t 的多项式方程，它的根就是各交点的参数，而原点则以因子 t^2 的形式出现。余下的是一个没有 t^3 项的四次方程（quartic），所以它的根之和是固定的，两两乘积之和也是固定的。既然已知其中两个根 r 和 s，另外两个根便完全确定。

解答

草图

由于 $x = t^2 \geq 0$，曲线位于半平面 $x \geq 0$ 内。把 t 换成 $-t$ 会把 (x, y) 变成 $(x, -y)$，所以曲线关于 x 轴对称。消去 t 得 $y^2 = x^3$，故 $y = \pm x^{3/2}$。当 $t = 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$，而在原点附近 $|y| = x^{3/2}$ 远小于 x。因此两条分支离开 O 时都与 x 轴相切，曲线在 O 处有一个尖点（cusp）。当 t 很大时，两条分支上升得很陡，因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$。



曲线 C_1 以蓝绿色绘出。琥珀色的圆是 C_2 的一个例子，即 $r = 1$、$s = -\frac{1}{2}$ 时通过 O、R 和 S 的圆。

四次方程

通过原点的圆，其方程没有常数项：

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

其中 g 和 f 是不同时为零的实常数。参数为 t 的点位于圆上，当且仅当

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{即} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

因子 t^2 给出 $t = 0$，也就是原点。除 O 以外的每个交点都有 $t \neq 0$，所以它的参数满足

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

特别地，r 和 s 都是这个方程的根，而 a、b 是实常数，正如题目所要求。

C_1 上每一点恰好对应一个参数，因为当 $x \neq 0$ 时 $t = y/x$（而当 $x = 0$ 时 $t = 0$）。所以相异的两点 R 和 S 有相异的参数，即 $r \neq s$，而 C_1 与 C_2 的交点恰好对应方程 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$ 的实根。

另外两个根

设四次方程的四个根（实根或复根）为 r、s、p 和 q。比较

$$(t - r)(t - s)(t - p)(t - q) = t^4 + 0 \cdot t^3 + 1 \cdot t^2 + at + b$$

两边的系数，得

$$r+s+p+q=0,$$
$$rs+(r+s)(p+q)+pq=1.$$

（这里我们把六个两两乘积分组为 rs、pq 和四个交叉项 $rp+rq+sp+sq=(r+s)(p+q)$。）

想一想 四个根之中我们只知道两个。在不知道 a 和 b 的情况下，怎样才能求出另外两个？

t^3 和 t^2 这两项的系数，即没有用字母表示的那两个，完全与圆无关。第一条方程给出 $p+q=-(r+s)$。代入第二条方程，

$$pq=1-rs+(r+s)^2=r^2+rs+s^2+1.$$

所以 p 和 q 是以下二次方程的根：

$$t^2+(r+s)\,t+\left(r^2+rs+s^2+1\right)=0,$$

其系数只取决于 r 和 s。C_1 与 C_2 若再有其他交点，其参数必须是这个二次方程的实根。

（顺带可得 $a=-(r+s)(r^2+s^2+1)$ 及 $b=rspq=rs(r^2+rs+s^2+1)$，所以通过 O、R 和 S 的圆由 r 和 s 确定。）

再没有其他实交点

这个二次方程的判别式（discriminant）是

$$\begin{aligned}\Delta&=(r+s)^2-4\left(r^2+rs+s^2+1\right)\\&=-3r^2-2rs-3s^2-4\\&=-\left[2(r^2+s^2)+(r+s)^2+4\right].\end{aligned}$$

方括号内的数值至少是 4，因为 $2(r^2+s^2)$ 和 $(r+s)^2$ 都是非负的。所以 $\Delta\le -4<0$，这个二次方程没有实根：p 和 q 是一对非实数的共轭复数（complex conjugates）。

因此 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ 的实根只有 0、r 和 s。由于每个实根恰好对应 C_1 上的一点，C_1 与 C_2 的实交点就只有 O、R 和 S。这正是我们要证明的。

验算

取 $r=1$，$s=-\frac{1}{2}$。由上面的公式得 $a=-\frac{9}{8}$ 及 $b=-\frac{7}{8}$，所以 $f=-\frac{9}{16}$，$g=-\frac{7}{16}$。圆心是 $(\frac{7}{16},\frac{9}{16})$，而 $R=(1,1)$ 和 $S=(\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$ 与圆心的距离平方都是 $\frac{130}{256}$，O 也是如此。余下

的二次式是 $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{4}$，其判别式为 $\frac{1}{4} - 7 < 0$。这就是图中的圆，可以看到它与 C_1 只相交于 O、R 和 S。我们还用数值方法检验了 400 对随机选取的 (r, s)。对每一对，我们求出通过 O、R、S 的圆，确认了因式分解，并在 $-30 \le t \le 30$ 的范围内逐点检查：圆方程只在 $t = r$ 和 $t = s$ 处变号。

常见错误

- 忘记通过 O 的圆没有常数项。一般的圆有三个常数，而正是因为少了常数项，才会出现因子 t^2。
- 以为重根（double root）$t = 0$ 表示圆在 O 处与 C_1 相切。其实这个重根来自尖点：每一个通过 O 的圆都会给出因子 t^2。
- 只说判别式“显然是负数”，却没有把它写成“负的平方和加正常数”的形式。

STEP 之外

曲线 $y^2 = x^3$ 是奇异三次曲线（singular cubic curve）的标准例子。像本题这样连同重数（multiplicity）一起计算交点，正是贝祖定理（Bézout's theorem）的起点：次数分别为 m 和 n 的两条曲线，按适当方式计算，相交于 mn 点。一条三次曲线和一个圆给出 6 个交点，这与我们的结果吻合：O 处的两个，加上 R、S 和两个复数点。同一套韦达（Vieta）式的系数关系，也是椭圆曲线（elliptic curves）上群律（group law）的基础。Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry* 以及 Silverman 与 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 都把这些想法进一步发展下去。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。