详细解答

# STEP III 1992，第 2 题

纯数学 · 矩阵的幂与数学归纳法

> **STEP III 1992，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

## 关键思路

一切都建基于一个事实：$\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$。这表示任何形如 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 的矩阵（matrix）相乘，所得的积仍然是这个形式，所以我们自始至终只需追踪一个数。只要留意到在乘法之下表现良好的是 $1 + 2p$ 而不是 $p$，那些看似累赘的式子 $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$ 便一目了然。

## 解答

### 一条乘法法则

由于

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J},$$

而且 $\mathbf{I}$ 与任何矩阵都可交换（commute），所以对任意实数 $p$ 和 $q$，

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p + q + 2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

留意

$$1 + 2(p + q + 2pq) = (1 + 2p)(1 + 2q),$$

所以如果我们把数 $1 + 2p$ 配给矩阵 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$，矩阵相乘便对应于这些数相乘。对于 $\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$，所配的数是 $1 + 2a$。

### 平方与立方

在 $(*)$ 中取 $p = q = a$，得

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + (2a + 2a^2)\mathbf{J}, \qquad \text{及} \qquad \tfrac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1] = \tfrac{1}{2}(4a + 4a^2) = 2a + 2a^2,$$

所以 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]\mathbf{J}$，正如题目所求。

至于立方，写成 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$，并在 $(*)$ 中取 $p = 2a + 2a^2$，$q = a$：

$$\begin{aligned} p + q + 2pq &= 2a + 2a^2 + a + 2a(2a + 2a^2) \\ &= 3a + 6a^2 + 4a^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(6a + 12a^2 + 8a^3) = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1], \end{aligned}$$

当中用到 $(1+2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$。所以 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1]\mathbf{J}$，正如题目所求。

至于四次方，最快捷的做法是 $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$。取 $p = q = \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]$，则 $1 + 2p = (1+2a)^2$，所以配给 $\mathbf{A}^4$ 的数是 $(1+2a)^2(1+2a)^2 = (1+2a)^4$。因此

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^4 - 1]\mathbf{J} = \mathbf{I} + (4a + 12a^2 + 16a^3 + 8a^4)\mathbf{J}.$$

### 一般次方

从以上规律可以猜想

$$p_k = \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1], \qquad \text{等价地} \qquad 1 + 2p_k = (1+2a)^k.$$

我们用归纳法（induction）证明，对所有整数 $k \geq 1$，$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ 成立。

基础步骤。当 $k = 1$ 时，$p_1 = \frac{1}{2}(1 + 2a - 1) = a$，而 $\mathbf{A}^1 = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$。（公式亦给出 $p_0 = 0$，与 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 吻合。）

归纳步骤。假设 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$，其中 $p_k$ 如上所述。那么由 $(*)$，

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{I} + (p_k + a + 2ap_k)\mathbf{J},$$

而

$$\begin{aligned} p_k + a + 2ap_k &= (1+2a)p_k + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)[(1+2a)^k - 1] + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1} - \tfrac{1}{2}(1+2a) + a \\ &= \tfrac{1}{2}[(1+2a)^{k+1} - 1] = p_{k+1}. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$，由归纳法可知

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]\mathbf{J} \qquad \text{对所有整数} k \geq 1.$$

**想一想** 假如题目没有先给出 $\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{A}^3$，我又怎样猜到 $p_k$ 的形式?

答案就在递推关系（recurrence）本身：归纳步骤显示 $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$，这是一个一阶线性递推关系。两边同时加上 $\frac{1}{2}$，得 $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$，所以 $p_k + \frac{1}{2}$ 是等比数列（geometric sequence），公比为 $1 + 2a$，首项为 $a + \frac{1}{2}$。这正正就是 $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$。

**负数次方（额外收获）。** 若 $a \neq -\frac{1}{2}$，公式对 $k=-1$ 同样成立：$p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$，而由 $(*)$ 得 $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$，所以 $(\mathbf{I}+a\mathbf{J})(\mathbf{I}+p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$。若 $a = -\frac{1}{2}$，则 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 是奇异（singular）矩阵，而公式对每个 $k \geq 1$ 都给出 $p_k = -\frac{1}{2}$：事实上 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$。

## 验算

- 取 $a=1$：$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，直接相乘得 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$。公式给出 $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$ 及 $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$。
- $\mathbf{A}$ 有特征向量（eigenvector）$(1,1)$，对应的特征值（eigenvalue）为 $1+2a$；另有特征向量 $(1,-1)$，对应的特征值为 $1$。所以 $\mathbf{A}^k$ 的特征值是 $(1+2a)^k$ 和 $1$；矩阵 $\mathbf{I}+p_k\mathbf{J}$ 的特征值是 $1+2p_k$ 和 $1$，两者一致。
- 我们以精确的有理数运算，对 $0 \leq k \leq 12$ 以及四十个随机选取的 $a$ 值（包括 $a=-\frac{1}{2}$）验证了 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$。

## 常见错误

- 用二项式定理（binomial theorem）展开 $(\mathbf{I}+a\mathbf{J})^k$ 是合理的（因为 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{J}$ 可交换），但若忘记 $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$ 而误当作 $\mathbf{J}$，便会得出错误的系数。
- 在归纳步骤中，先写下关于 $p_{k+1}$ 的结论再倒推回去，并不算是证明；应该由 $\mathbf{A}^k\mathbf{A}$ 出发。

## STEP 之外

我们配给 $\mathbf{I}+p\mathbf{J}$ 的数 $1+2p$，正是该矩阵对应于向量 $(1,1)$ 的特征值；所有这类矩阵都有相同的特征向量 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$，所以它们可以用同一个基底变换（change of basis）同时对角化，而计算次方时只需把特征值自乘 $k$ 次。这就是对角化（diagonalisation）背后的想法，它把矩阵次方、矩阵指数和线性递推关系都化为纯量计算。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）以大量例题阐述这个想法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。