详细解答

STEP III 1992，第 14 题

力学 · 解绕绳的动力学

> **STEP III 1992，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

关键思路

整个问题只由一个角 θ 决定。绳子未贴着圆盘的部分在 Q 点与圆盘相切（tangent），其长度等于已从圆盘松开的那段绳子的弧长，因此很容易用 θ 表示 P 的位置（P 所描出的曲线是圆的渐伸线（involute））。求导之后，会发现 P 的速度（velocity）与绳子垂直。所以绳子的张力（tension）不作功，沿运动方向只有摩擦力（friction）起作用。于是沿 PQ 方向和垂直于它的方向分解，便可把问题干净利落地一分为二。

解答

P 的位置

把 P 视为水平桌面上的一个质点（particle），所受阻力只有题目给出的摩擦力，并把绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible）。重力与法向反作用力（normal reaction）互相抵销，所以水平方向的力只有沿 PQ 的张力 T 和摩擦力。

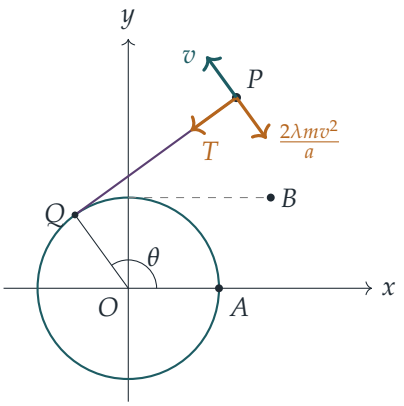
取 $A = (a, 0)$ 在 x 轴上，则切点为 $Q = (a\cos\theta, a\sin\theta)$。当 P 位于 A 时，整条绳子都绕在圆盘上；由于绳子不可伸长，松开的部分 QP 的长度等于已解开的弧 AQ 的长度，即 $a\theta$。绳子在 Q 点与圆盘相切，所以 QP 垂直于 OQ，方向为单位向量（unit vector）$(\sin\theta, -\cos\theta)$（当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，这向量是 $(1, 0)$，由圆盘顶点指向 B，如图所示）。因此

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta, -\cos\theta),$$

所以

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

第一条式子就是所求的 x 坐标。在 B 点，松开的绳子与 OA 平行，并在圆盘顶点与圆盘相切，所以该处 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而 $B = (\frac{\pi a}{2}, a)$。



速度与加速度

设 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 为沿 OQ 方向的单位向量，$\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 为由 P 指向 Q 的单位向量（与上文的绳子方向相反）。注意 $\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$ 及 $\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$。

对 x 和 y 求导，

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

所以速度为 $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$：它与 OQ 平行，因而与绳子垂直。利用乘法法则（product rule）再求导一次，

$$\ddot{\mathbf{r}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

所以加速度沿 PQ 方向（指向 Q）的分量为 $a\theta\dot\theta^2$，而垂直于 PQ 方向（即 $\mathbf{e}$ 的方向）的分量为 $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$，正如题目所要求。

运动方程

在 B 点，$\theta = \frac{\pi}{2}$，速度为 $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$。质点沿垂直于 OA 并远离 OA 的方向抛出，即表示速度 V 沿 y 轴正方向，所以

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{（起初）。}$$

只要 $\dot\theta > 0$，速率便是 $v = a\theta\dot\theta$，而运动方向为 $+\mathbf{e}$，所以大小为 $2\lambda mv^2/a = 2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2$ 的摩擦力沿 $-\mathbf{e}$ 方向作用。张力沿 $\mathbf{f}$ 方向作用，没有 $\mathbf{e}$ 分量。

> ? **想一想** 要得到一条只含 θ 的方程，应该用加速度两个分量中的哪一个?

应该用垂直的那个：张力 T 是未知的，而它只出现在沿 PQ 方向的分量之中。在垂直于

PQ 的方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m(a\dot{\theta}^2 + a\theta\ddot{\theta}) = -2\lambda m a\theta^2\dot{\theta}^2.$$

两边除以 $ma\theta\dot{\theta}$（这是容许的，因为 $\theta > 0$ 且 $\dot{\theta} > 0$），

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\left(\frac{1}{\theta} + 2\lambda\theta\right)\dot{\theta},$$

这就是所求的结果。

求 $\dot{\theta}$

左边是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot{\theta}$，而根据链式法则（chain rule），右边是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\ln\theta - \lambda\theta^2)$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln(\theta\dot{\theta}) + \lambda\theta^2\right) = 0, \qquad \text{所以} \qquad \theta\dot{\theta}\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2} = \text{常数}.$$

在 B 点，这个常数为 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4} = \frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$。于是

$$\dot{\theta} = \frac{V}{a\theta}\,\exp\!\left(\lambda\left(\frac{\pi^2}{4} - \theta^2\right)\right).$$

这对任何 θ 都是正数，所以 $\dot{\theta}$ 永不为零，上文所用的假设 $\dot{\theta} > 0$ 自始至终成立。（答案除了 θ、λ 和 a 之外，必然还涉及 V。）等价地说，速率为 $v = a\theta\dot{\theta} = V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4-\theta^2)}$。

$\theta = \pi$ 时的张力

沿 PQ 方向只有 T 这一个力，它指向 Q，所以 $T = ma\theta\dot{\theta}^2$。当 $\theta = \pi$ 时，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4-\pi^2)} = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

所以

$$T = ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2} = \frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

验算

- 松开的绳子 PQ 长度为 $a\theta$，而它正是渐伸线的曲率半径（radius of curvature），所以 Q 是曲率中心（centre of curvature），指向 Q 的加速度分量应为 $v^2/(a\theta) = a\theta\dot{\theta}^2$。结果确是如此。
- 当 $\lambda = 0$（没有摩擦力）时，速率保持为 V；这是必然的，因为张力与运动方向垂直，不作功。在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$T = mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$，这正是以 B 点的绳长 $r = \frac{\pi a}{2}$ 代入 mv^2/r 的结果。

- 数值方面，取 $a = 1.3$、$m = 0.7$、$V = 2.1$、$\lambda = 0.25$，我们用龙格－库塔法（Runge–Kutta method）逐步求解 θ 的方程：结果与 $\dot{\theta}$ 的公式吻合，误差在 10^{-14} 以内。以有限差分（finite difference）计算 (x, y) 的加速度，所得结果与两个分量及摩擦力均吻合，并在 $\theta = \pi$ 时得出 $T \approx 0.018667$，与公式一致。

常见错误

- 以 $\theta = 0$ 作为初始值：质点由 B 出发，该处 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而不是由 A 出发。
- 沿 PQ 方向分解来求 $\dot{\theta}$：那条方程含有未知的张力，而摩擦力在该方向没有分量。
- 忘记摩擦力与速度方向相反，而速度是沿 OQ 方向，不是沿绳子方向。

STEP 之外

P 的路径是圆的渐伸线，即拉紧的绳子从线轴上松开时，绳端所描出的曲线，也是大多数齿轮轮齿所采用的形状。这里用到的事实（速度与绳子垂直，以及绳长就是曲率半径），都是曲线微分几何（differential geometry）中渐屈线（evolute）与渐伸线关系的特殊情况。从动力学的角度看，这是一个很好的例子，说明如何利用内禀（intrinsic）分量（即切向和法向分量）把已知的力与未知的约束力（constraint force）分开。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种思路讨论极坐标（polar coordinates）和内禀坐标下的运动，以及受约束的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。