详细解答

STEP III 1992，第 13 题

力学 • 绕固定轴的转动

STEP III 1992，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s3-q13

关键思路

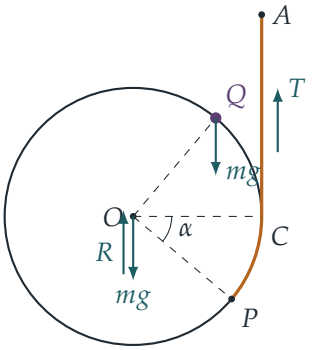
转轴固定，所以圆盘与质点构成一个刚体（rigid body），只需一个坐标，即转过的角度。由能量守恒（conservation of energy）（弹性势能、重力势能、动能）可得每个位置的角速率（angular speed），而“P 到达 C”的意思不过是动能在途中始终不会降至零。求得在 C 处的角速率后，把牛顿（Newton）第二定律应用于整个系统的质心（centre of mass），便可求出转轴上的反作用力（reaction）。

解答

模型与几何

我们把 Q 视为质点，并把弦线视为轻弦。我们假设盘边光滑，所以整条弦线上的张力 T 处处相同，而弦线对盘边的法向接触力都通过 O。因此，弦线对 O 的力矩（moment）只有在 P 处沿切线方向拉扯的张力所产生的力矩，即 $2bT$。（若把张力看成作用于弦线在 C 处离开盘边的位置，所得的力矩完全相同：张力沿 AC 铅垂向上，与 O 的距离为 $2b$。）

设 $\alpha = \angle POC$，其中 P 在 OC 下方。释放时 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，而 P 到达 C 时 $\alpha = 0$。由于 $\angle POQ = 90^\circ$，OQ 在 OC 上方并与之成角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以 Q 的高度比 O 高 $2b\cos\alpha$。特别地，Q 起初与 O 同高（位于 C），而当 P 到达 C 时，它在 O 的正上方。



弦线的总长度为 $AC + \text{弧}CP = \pi b + 2b\alpha$，而其自然长度（natural length）为 πb，所以伸长量（extension）为 $2b\alpha$。由胡克定律（Hooke's law），

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

而所储存的弹性势能（elastic energy）为

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

对转轴的转动惯量（moment of inertia）等于圆盘的转动惯量加上盘边上 Q 的转动惯量：

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P 到达 C

当圆盘转动，使 P 向 C 上升（即 α 减小）时，弦线缩短并释出弹性势能，同时 Q 上升。转轴固定而且光滑，所以能量守恒。系统在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 处由静止开始运动，此时 Q 相对于 O 的高度为 0，且 $E = \frac{1}{2}\pi kmgb$，于是

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

圆盘确实会朝正确的方向开始转动：释放时弦线以 $T = kmg$ 在半径 $2b$ 处拉扯，而 Q 的重量则在水平距离 $2b$ 处产生反方向的力矩，所以净力矩为 $2(k-1)mgb > 0$，因为 $k > \frac{4}{\pi} > 1$。

P 能到达 C，只要对 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内的每个 α，动能都保持为正，即只要

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{对于} 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

由于 $k > \frac{4}{\pi}$ 且 $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$，左边大于

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

所以只需证明在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 $g(\alpha) = 1 - \dfrac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$。

想一想 怎样在整个区间上比较一个二次函数与 $\cos\alpha$?

考虑二阶导数（second derivative）。我们有 $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$，$g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$，所以 $g'(0) = 0$，而 $g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$。由于 $\frac{8}{\pi^2} < 1$，而 $\cos\alpha$ 由 1 递减至 0，故存在唯一的 α_0，使得在 $[0, \alpha_0)$ 上 $g'' > 0$，在 $(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $g'' < 0$。

- 在 $[0, \alpha_0]$ 上，g' 由 $g'(0) = 0$ 开始递增，所以 $g' \geq 0$，从而 $g \geq g(0) = 0$。
- 在 $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上，g 是凹（concave）的，所以它的图像位于连接两端点值 $g(\alpha_0) \geq 0$ 与 $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ 的弦之上；因此在该处同样有 $g \geq 0$。

所以 $g \geq 0$ 处处成立，而严格不等式 $k > \frac{4}{\pi}$ 使动能在 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时严格为正。圆盘在 $\alpha = 0$ 之前不会静止下来，所以 P 到达 C。特别地，在 C 处（代入 $\alpha = 0$），

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

其中 ω 是 P 位于 C 时的角速率。（由此可见条件 $k > \frac{4}{\pi}$ 的来由：它正好保证 $\omega^2 > 0$。）

转轴上的反作用力

当 P 位于 C 时，有两件事同时发生。

- 弦线处于自然长度（$AC = \pi b$，而弧段已消失），所以 $T = 0$。
- Q 在 O 的正上方，所以它的重量对 O 没有力矩。

所以在该瞬间对转轴没有力矩，角加速度为零。圆盘的中心 O 固定不动，而 Q 沿半径为 $2b$ 的圆运动，角加速度为零，所以它的加速度纯粹是向心（centripetal）的：大小为 $2b\omega^2$，方向由 Q 指向 O，即铅垂向下。

想一想 求反作用力的方程中应包括哪些力?

对整个系统（圆盘连同 Q）在铅垂方向应用牛顿第二定律。外力包括两个重量，合共 $2mg$ 向下；转轴上的反作用力 R 向上；以及弦线的张力，它在此瞬间为零。Q 与圆盘之间的内力互相抵消。只有 Q 有加速度，所以

$$R - 2mg = m\,(-2b\omega^2),$$

因此

$$R = 2mg - 2mb \cdot \frac{(\pi k - 4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k - 4)}{3} = \frac{mg(10 - \pi k)}{3},$$

正如所求。（反作用力的水平分量在此瞬间为零，因为 Q 没有水平加速度。）

验算

- 在临界情况 $k = \frac{4}{\pi}$ 下，系统仅仅能够缓缓升到 C，此时 $\omega = 0$，而公式给出 $R = 2mg$，即静止时的值。两者吻合。
- 用电脑对运动方程 $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$（其中 $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$）作数值积分。取 $m = g = b = 1$ 及 $k = 2$，系统到达 C 时 $\omega^2 = 0.38053$，与 $(2\pi - 4)/6$ 相符，且 $R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$。对于 $k = 1.29$, 1.5, 3，结果同样准确至小数点后六位。
- 若 $k > \frac{10}{\pi}$，公式给出 $R < 0$：转轴必须向下拉，因为 Q 越过顶点时转得太快，所需的向心力超过了系统的重量。

常见错误

- 把伸长量自始至终当作 πb。事实上，当 P 到达 C 时，伸长量会缩减至零，这正是张力在该处消失的原因。
- 忘记圆盘本身的转动惯量 $\frac{1}{2}m(2b)^2$，只用了 Q 的转动惯量。
- 只证明在 C 处的动能为正。“P 到达 C”要求动能在整段路程上都保持为正。

STEP 之外

最后一步是“外力总和等于总质量乘以质心加速度”的刚体版本，而求支点上的反作用力正是它的经典应用。大学一年级的刚体动力学课程会把它与角动量方程 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$ 一并发展。不等式 $\cos\alpha \le 1 - 4\alpha^2/\pi^2$ 是约当不等式（Jordan's inequality）$\sin x \ge 2x/\pi$ 的近亲，这里是用标准的凸性（convexity）论证来证明的。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对定轴转动及支点反作用力有非常清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。