详细解答

STEP III 1992，第 12 题

力学 • 动量守恒

STEP III 1992，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

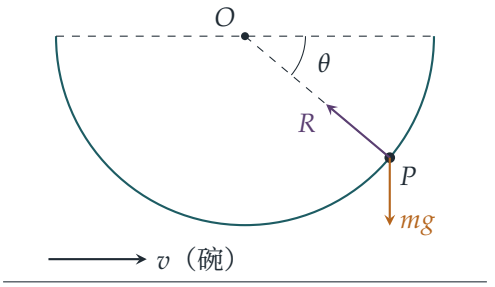
step.maths.org/questions/92-s3-q12

关键思路

碗与质点组成的系统并无受到任何水平方向的外力，而且除重力外没有其他力作功，所以我们有两条守恒定律：水平动量守恒（conservation of horizontal momentum）和能量守恒（conservation of energy）。动量把碗的速率与 $\dot{\theta}$ 联系起来；能量随后给出 v^2。至于反作用力（reaction），最简洁的做法是在碗的（加速）参考系（frame）中处理，在那里质点只是绕 O 作圆周运动；同时要记住，反作用力也是碗所受的唯一水平力。

解答

模型。碗是光滑的，所以 P 所受的反作用力 R 沿法线方向，即沿 PO 方向。小车是轻的，桌面是光滑的，所以碗（连同小车）所受的唯一水平力，就是质点推力的水平分量。设 P 从碗边的右端出发，于是当 P 向下滑时，θ 从 0 开始增加；碗则向右移动。



水平动量守恒

设碗的水平位置为 X，则 $\dot{X} = v$。相对于 O，质点位于 $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，所以它的位置是 $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，而它的速度是

$$(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta).$$

系统没有受到水平方向的外力，而且由静止开始，所以总水平动量始终为零：

$$2mv + m(v - a\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

这正是所要求的结果。留意此时质点的水平速度是 $v - 3v = -2v$：它以碗的速率的两倍向左移动，这样才能抵销碗的动量 $2mv$。

能量

反作用力所作的净功为零（它是内力，而且表面光滑），桌面也不作功，所以能量守恒。当 OP 处于角度 θ 时，质点已下降了 $a\sin\theta$。利用 $a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$，质点的垂直速率为 $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$，所以

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta] \\ &= mv^2\left(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\right). \end{aligned}$$

两边乘以 $2\sin^2\theta/m$：

$$2ga\sin^3\theta = v^2(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta) = v^2(9 - 3\sin^2\theta),$$

所以

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

这就是第二个结果。

反作用力

> **想一想** 碗正在加速。我们怎样写出质点沿 PO 方向的运动方程（equation of motion）？

用两条方程。第一，考虑碗：质点以大小为 R、方向由 O 指向 P 的力推它，这个力的水平分量是向右的 $R\cos\theta$。所以碗的加速度 A 满足

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

第二，考虑质点，在碗的参考系中处理。在那里质点以速率 $a\dot{\theta}$ 在以 O 为圆心、半径为 a 的圆上运动，而除了 R 和 mg 之外，它还受到一个向左的假想力（fictitious force）mA。

沿指向 O 的方向（方向为 $(-\cos\theta, \sin\theta)$）分解，重力的贡献是 $-mg\sin\theta$，假想力的贡献是 $+mA\cos\theta$，所以

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

（等价地，在地面参考系中，质点的加速度等于碗的加速度 A 加上它相对于碗的圆周运动加速度；把它沿 PO 方向分解，会得到同一条方程。）

由头两个结果，

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

把由 (1) 得到的 $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$ 代入 (2)，并把含 R 的项合并：

$$R\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

由于 $1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$，

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

验算

- 在起点，$\theta = 0$ 给出 $R = 0$，这是应有的结果：质点静止于碗边，没有任何东西把它压向碗。
- 在碗底，$\theta = \frac{1}{2}\pi$：碗的加速度为零（由 (1)），$a\dot{\theta}^2 = 3g$，而 $R - mg = 3mg$，所以 $R = 4mg$，与公式给出的 $2mg\cdot 8/2^2$ 吻合。
- 假如碗是固定的（无限重），通常的结果会是 $v_P^2 = 2ga\sin\theta$ 和 $R = 3mg\sin\theta$；碗的反冲令 R 在碗边附近变小（当 θ 很小时约为 $2mg\sin\theta$ 而不是 $3mg\sin\theta$，因为碗正在远离 P），但在碗底却变大（$4mg$ 而不是 $3mg$）。
- 以数值方法逐步求解完整的运动方程（取 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$g = 9.81$），由碗边一直到碗底，都重现了 $3v = a\dot{\theta}\sin\theta$、$v^2$ 的公式和 R 的公式，误差在 10^{-7} 以内。

常见错误

- 写成 $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$，仿佛碗是固定的。碗在加速，所以质点的加速度并不只是它相对于碗的圆周运动加速度。
- 用 $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$ 作为质点的动能（kinetic energy）：$a\dot{\theta}$ 是它相对于碗的速率，而不是相对于桌面的速率。

STEP 之外

这是一个二自由度（two-degree-of-freedom）系统，而最简洁、最有系统的处理方法是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）：把动能和势能（potential energy）用 X 和 θ 表示，动量守恒便会自然得出，因为 X 并不出现在拉格朗日量（Lagrangian）之中（它是一个“循环”（cyclic）坐标）。我们所用的假想力，是非惯性参考系（non-inertial frame）力学中最简单的情形；大学一年级的课程会把它推广到旋转参考系，并引入离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对非惯性参考系和相互作用物体的系统都有很出色的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。