详细解答

STEP III 1992，第 11 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP III 1992，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

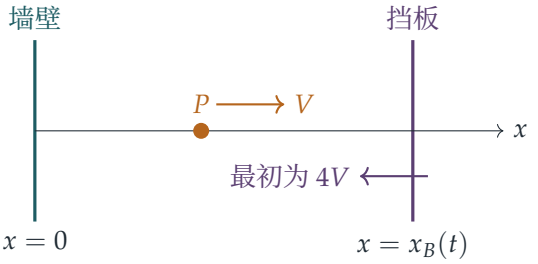
step.maths.org/questions/92-s3-q11

关键思路

所有位置一律由墙壁量起，这样质点和挡板与墙壁的距离各自都有一条简单的公式。所谓碰撞，不过是其中两条公式取值相同的一刻，于是每个关于时间的问题都化为一条二次方程（quadratic）。碰撞时，牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）针对的是相对速度（relative velocity），所以挡板在该瞬间本身的速度至关重要。

解答

把 P 看成一个质点（particle），在光滑（smooth）桌面上沿着通过 O 并垂直于墙壁的直线运动。取 x 为与墙壁 AB 的距离，以朝向挡板的方向为正，并由抛射的一刻起计时间 t。速度以离开墙壁的方向为正。



第一次碰撞

挡板起初与墙壁相距 $\frac{75}{32}VT$，速度为 $-4V$，并有恒定加速度（constant acceleration）$+4V/T$，所以由匀加速运动公式可得

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

在首次碰到任何东西之前，P 以恒定速率运动（因为桌面光滑），所以 $x_P = Vt$。两者在 $x_P = x_B$ 时相遇。设 $s = t/T$，则

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \iff 64s^2 - 160s + 75 = 0 \iff (8s-5)(8s-15) = 0.$$

首次相遇对应较小的根，所以碰撞发生于 $t = 5T/8$，正如题目所求。（在此之前，间距 $x_B - x_P$ 为正，因为它在 $s = 0$ 时为正，而其间并无任何根。）

此刻 P 位于 $x = \frac{5}{8}VT$，而挡板的速度为

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

所以挡板仍然朝着墙壁运动，速率为 $\frac{3}{2}V$。

碰撞后的速率

挡板的运动不受影响，所以只需用到牛顿实验定律（Newton's experimental law）。接近速率（speed of approach）为 $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$。若 P 在紧接碰撞之后的速度为 w，则分离速率（speed of separation）为 $-\frac{3}{2}V - w$，而

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \implies w = -\tfrac{11}{4}V.$$

所以 P 以速率 $\dfrac{11V}{4}$ 朝墙壁反弹。

> **想一想** 为甚么反弹后的速率比 P 原先的速率 V 还要大?

碰撞的一刻，挡板正朝着 P 运动，就像球棒击球一样。恢复定律针对的是 P 相对于挡板的速率：相对于挡板，P 以 $\frac{5}{2}V$ 到达，以 $\frac{5}{4}V$ 离开。再加上挡板本身朝向墙壁的 $\frac{3}{2}V$，便得 $\frac{11}{4}V$。

从墙壁反弹与第二次碰撞

P 要以速率 $\frac{11}{4}V$ 走过距离 $\frac{5}{8}VT$，需时 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$。因此它撞上 AB 的时刻为

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

挡板不可能在途中挡路。在这段时间内，它朝墙壁运动的速率始终比 P 慢（它的速率由 $\frac{3}{2}V$ 起不断下降），而且它根本不会到达墙壁：它最接近墙壁的时刻是 $t = T$，此时 $v_B = 0$，而 $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$。

墙壁固定不动，所以当 $e=\frac{1}{2}$ 时，质点以速率 $\frac{11}{8}V$ 反弹，其后

$$x_P=\tfrac{11}{8}V\left(t-\tfrac{75}{88}T\right)=\tfrac{11}{8}Vt-\tfrac{75}{64}VT.$$

下一次与挡板碰撞，发生于 t_1 之后首次出现 $x_P=x_B$ 的时刻。以 $s=t/T$ 表示，

$$\tfrac{75}{32}-4s+2s^2=\tfrac{11}{8}s-\tfrac{75}{64}\quad\Longleftrightarrow\quad 128s^2-344s+225=0\quad\Longleftrightarrow\quad(8s-9)(16s-25)=0.$$

两根为 $s=\frac{9}{8}$ 和 $s=\frac{25}{16}$。由于 $\frac{75}{88}<1<\frac{9}{8}$，两者都在 t_1 之后。在 t_1 时，间距 $x_B-x_P=x_B(t_1)$ 为正，所以间距首次缩减至零的时刻是较小的根。因此下一次与挡板碰撞，是在开始后 $9T/8$ 的时刻，正如题目所求。（作为验算，届时两者都位于 $x=\frac{3}{8}VT$。）

> **想一想** 为甚么必须取较小的根，而不是随便取一个根?

这条二次方程所描述的，是假设两者可以互相穿过时的运动。它的第二个根 $\frac{25}{16}T$，对应的是真正碰撞之后的一次“相遇”，但那时运动早已改变。实际的碰撞，是间距首次缩减至零的时刻。

验算

- 当 $t=\frac{5}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{80}{32}+\frac{25}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$（以 VT 为单位），与 x_P 相等。
- 当 $t=\frac{9}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{144}{32}+\frac{81}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$，而 $x_P=\frac{11}{8}\cdot\frac{24}{88}=\frac{3}{8}$。
- 取 $V=T=1$（步长 10^{-6}）作逐步时间模拟，得出碰撞时刻为 $t\approx0.6250$（反弹速度 -2.750）、$0.8523\approx\frac{75}{88}$ 及 1.1250。

常见错误

- 只对 P 本身的速率套用恢复定律，结果得出 $\frac{1}{2}V$ 而不是 $\frac{11}{4}V$。挡板正在运动，所以要用相对速度。
- 弄错加速度的正负号。挡板起初朝墙壁运动，但正在减速，并在 $t=T$ 时掉头。
- 忘记检查在 P 从 AB 反弹之前，挡板不会先碰到 P（或墙壁）。

STEP 之外

这里的巧妙之处，是在碰撞的瞬间改用挡板的参考系（frame of reference）来考虑。由于挡板的质量极大，恢复定律会把相对速度反向并按比例缩小，与固定的墙壁无异。这样转换参考系是大学一年级力学的核心技巧，并由此引伸出伽利略不变性（Galilean invariance），

以及二体碰撞中的质心参考系（centre-of-mass frame）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。