详细解答

STEP III 1992，第 10 题

纯数学 · 弧长与面积

> **STEP III 1992，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

关键思路

两条曲线的周界（perimeter）都是弧长（arc length）积分，而且都无法用初等函数求出（它们是椭圆积分（elliptic integrals）），所以要证明两者相等，唯一的方法就是把其中一个积分化成另一个。先写出每条曲线的弧长元素，利用 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 化简各自的被积函数（integrand），再作一次代换（substitution），加上一点对称性，便可看出两者其实是同一个积分。面积则较容易处理，因为两者都可以直接计算出来。

（试卷上印出的范围以 $\frac{1}{4}\theta$ 结尾。这显然是 $\frac{1}{4}\pi$ 的误印，我们取 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$。）

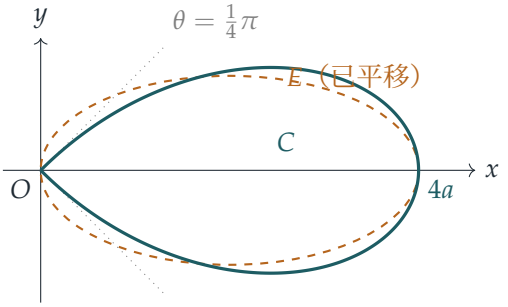
解答

描绘 C 的草图

当 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ 时，我们有 $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $r = 4a\cos 2\theta > 0$ 恒成立（取 $a > 0$）。曲线有以下特征：

- $r(-\theta) = r(\theta)$，所以 C 关于始线（initial line）对称。
- 最大值 $r = 4a$ 在 $\theta = 0$ 处取得，即点 $(4a, 0)$。
- 当 $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$ 时，$r \to 0$，所以曲线会进入原点，并在该处与直线 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 相切。

所以 C 是单一个闭合环圈，也就是四瓣玫瑰线（rose）$r = 4a\cos 2\theta$ 的其中一瓣，沿正 x-轴伸展。下图把它与 E 的一个复本画在一起，该复本平移了 $2a$，使它横跨同一个区间 $0 \le x \le 4a$。



C 的周界

对于极坐标（polar）曲线，弧长元素满足 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。这里 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$，所以

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

由于当 θ 走遍 $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ 时，环圈恰好被描画一次，因此

$$\text{周界}C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $\phi = 2\theta$，于是 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$，而积分上下限变成 $\pm\frac{1}{2}\pi$：

$$\text{周界}C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

最后一步成立，是因为被积函数是 ϕ 的偶函数（even function）。

E 的周界

设 $x = 2a\cos\phi$，$y = a\sin\phi$，则

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

而当 ϕ 由 0 走到 2π 时，E 恰好被描画一次，所以

$$\text{周界}E = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

? **想一想** 为甚么 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的积分的四倍?

记 $g(\phi)=\sqrt{1+3\sin^2\phi}$。因为 $\sin^2(\pi-\phi)=\sin^2\phi$，$g$ 在 $[\frac12\pi,\pi]$ 上的图像是它在 $[0,\frac12\pi]$ 上的图像的镜像，所以 $\int_0^{\pi}g=2\int_0^{\pi/2}g$。因为 $\sin^2(\phi+\pi)=\sin^2\phi$，$g$ 的周期为 π，所以 $\int_{\pi}^{2\pi}g=\int_0^{\pi}g$。（从几何上看，椭圆在四个象限内的部分长度相等。）因此

$$\text{周界}E=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

这正好就是我们之前求得的 C 的周界的表达式。所以两个周界相等，而我们从头到尾都不必计算这个积分的值。

面积

极坐标曲线所围的面积是 $\frac12\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用 $\cos^2 2\theta=\frac12(1+\cos 4\theta)$，

$$\begin{aligned}\text{所围面积}C&=\frac12\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\left[\theta+\tfrac14\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

至于椭圆，一条以逆时针方向描画的闭合曲线所围的面积是 $\frac12\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$，由此得

$$\text{所围面积}E=\frac12\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi+2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi=\frac12\cdot 2a^2\cdot 2\pi=2\pi a^2.$$

（同样地，这就是标准公式 $\pi\times$ 半轴 $\times$ 半轴 $=\pi(2a)(a)$。）所以两个面积相等，同为 $2\pi a^2$。

验算

- 取 $a=1.7$，以 200 000 边的多边形逼近每条曲线，得出两个周界均为 16.470362，与用森逊法则（Simpson's rule）算出的 $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 相等。所以每个周界约为 $9.6884a$。
- 同样的多边形给出两个面积均为 $18.158406=2\pi(1.7)^2$。
- 对 C 的面积作一个合理性检查：它位于长方形 $0\le x\le 4a$，$|y|\le 1.1a$ 之内，该长方形的面积约为 $8.8a^2$，而 $2\pi a^2\approx 6.3a^2$ 占其中一个合理的比例。

常见错误

- 代入 $\phi=2\theta$ 时，忘记了来自 $\mathrm{d}\theta=\frac12\mathrm{d}\phi$ 的因子 $\frac12$。因子 $4a$ 对 C 而言会变成 $2a$，要到偶函数那一步之后才再次变回 $4a$。
- 计算极坐标面积时，用了 $\int r\,\mathrm{d}\theta$ 而不是 $\frac12\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。

▶ 把 $0 \leq \theta < 2\pi$ 范围内的整条玫瑰线 $r = 4a\cos 2\theta$ 当作 C。题目给定的范围只选出其中一瓣。

STEP 之外

积分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}\, \mathrm{d}\phi$ 称为第二类完全椭圆积分（complete elliptic integral of the second kind），它没有初等的原函数（antiderivative）。这就是题目不准计算积分的原因：椭圆的周界并没有闭合形式（closed form）。我们的积分是 $k^2 = -3$ 的情况。只要把 $\sin^2 \phi$ 换成 $1 - \cos^2 \phi$，再把 ϕ 换成 $\frac{1}{2}\pi - \phi$，便可把它改写成 $0 < k < 1$ 的标准形式。椭圆积分引出了椭圆函数（elliptic functions）和椭圆曲线（elliptic curves），而这些都是现代数论的核心。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多 STEP 题目，同样以这种方式比较极坐标曲线和参数（parametric）曲线的弧长和面积。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。