详细解答

STEP III 1992，第 1 题

纯数学 · 麦克劳林级数

> **STEP III 1992，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

关键思路

在第 (i) 部分，那两个恒等式（identity）就是一部制造导数（derivative）的机器：一旦把 f'' 用 f' 表示出来，再逐次求导便可得到所有更高阶的导数，而在 $x = 0$ 处，一切都由 $f'(0) = \frac{1}{2}$ 构建而成。在第 (ii) 部分，麻烦在于因子 $\sinh x$，它在原点处等于零；乘以 x 便可消去这个零点，于是展开式就是两个可以徒手求出的级数（series）之积。对称性（奇函数（odd function）与偶函数（even function））预先告诉我们哪些幂次可能出现。

解答

第 (i) 部分

利用链式法则（chain rule）对 $f(x) = \ln(1 + e^x)$ 求导，

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

所以它的对数有定义，并且

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

这就是第一个结果。对这个恒等式求导，左边得出 $f''(x)/f'(x)$，所以

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

正是所求。把它写成 $f'' = f'(1 - f')$ 会较为方便。

> **想一想** 怎样才能不必对 $\ln(1 + e^x)$ 求导四次，就得到 f''' 和 f''''?

直接对恒等式 $\mathrm{f}'' = \mathrm{f}' - (\mathrm{f}')^2$ 本身求导，对 $(\mathrm{f}')^2$ 使用积法则（product rule）：

$$\mathrm{f}''' = \mathrm{f}'' - 2\mathrm{f}'\mathrm{f}'' = \mathrm{f}''(1 - 2\mathrm{f}'),$$
$$\mathrm{f}'''' = \mathrm{f}'''(1 - 2\mathrm{f}') - 2(\mathrm{f}'')^2.$$

现在代入 $x = 0$，此时 $\mathrm{f}(0) = \ln 2$ 而 $\mathrm{f}'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$：

$$\mathrm{f}''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{f}'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$\mathrm{f}''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

根据麦克劳林定理（Maclaurin's theorem），$\mathrm{f}(x) = \sum \mathrm{f}^{(n)}(0)\, x^n / n!$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

其中 x^3 项为零（而 $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$）。

第 (ii) 部分

为何 g 没有这样的展开式。 一个只含非负幂次的级数 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ 在 $x = 0$ 处取有限值 a_0，并且在该处连续（continuous）。但 $\sinh 0 = 0$ 而 $\cosh 0 = 1$，所以当 $x \to 0$ 时，分母 $\sinh x \cosh 2x$ 趋向 0；事实上，由于 x 很小时 $\sinh x \approx x$，我们有 $\mathrm{g}(x) \approx 1/x$，它在 0 附近是无界的（unbounded）。因此 $\mathrm{g}(x)$ 在原点附近不可能等于这样的级数。

为何 $x\mathrm{g}(x)$ 有。 写成

$$x\,\mathrm{g}(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

由于 $\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$，因子 x 可以约去，于是

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

这是 1 除以一个常数项为 1 的级数；这样的倒数可以用二项式展开（binomial expansion）写成非负幂次的级数。同样，$\cosh 2x \geq 1$ 永不为零，而 $1/\cosh 2x$ 亦可用同样的方法展开。两个这样的级数之积仍是这样的级数。

为何只有偶数幂次。 sinh 是奇函数而 cosh 是偶函数，所以 $\mathrm{g}(-x) = -\mathrm{g}(x)$：g 是奇函数。因此 $h(x) = x\,\mathrm{g}(x)$ 满足 $h(-x) = (-x)(-\mathrm{g}(x)) = h(x)$，所以 h 是偶函数。若 $h(x) = \sum a_n x^n$，则 $h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ 为奇数}} a_n x^n$ 恒等于零，而由于恒等于零的幂级数（power series）所有系数皆为零，故对每个奇数 n 都有 $a_n = 0$。（你也可以直接看出这一点：上面两个因子都是 x^2 的级数。）

展开式。 利用 $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$，取 $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$，并保留至 x^4 的各项，

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

因为 $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$。其次，$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$（来自 $\frac{(2x)^2}{2}$ 和 $\frac{(2x)^4}{24}$），所以取 $v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$，

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

把两个级数相乘并按幂次整理：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{g}(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

因为 $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$。

验算

- 第 (i) 部分中 x^3 项消失并非偶然：$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$ 是偶函数，所以在 $\frac{x}{2}$ 之后只会出现偶数幂次。
- 数值上，在 $x = 0.1$ 处：$\ln(1+\mathrm{e}^x) \approx 0.7443966600$，与四次多项式 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$ 相差仅约 3.5×10^{-10}。
- 在 $x = 0.05$ 处，$x\,\mathrm{g}(x)$ 与 $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$ 相差约 9×10^{-8}，大约是 $6x^6$，与下一项为 x^6 项时的预期相符。

常见错误

- 把 $1/(1+u)$ 只展开成 $1-u$：u^2 项对 x^4 有贡献（即上面的 $\frac{1}{36}$ 和 $4x^4$）。
- 写成 $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24}\cdots$，忘记了 $2x$ 的 4 次方是 $16x^4$。

STEP 之外

第 (ii) 部分谈的是带有*极点*（pole）的函数：g 像 $1/x$ 那样趋向无穷，而乘以 x 便可消除这个奇点（singularity）。在复分析（complex analysis）中，这样的函数有一个*洛朗级数*（Laurent series）$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{13}{6}x^2 + \cdots\right)$，而 $1/x$ 的系数（即*留数*（residue），这里是 1）正

是计算许多实积分的关键。这个级数的收敛半径（radius of convergence）取决于分母最接近的另一个零点，即 $\cosh 2x = 0$ 之处 $x = \pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这些想法阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。