详细解答

STEP II 1992，第 9 题

纯数学 · 纯量三重积

> **STEP II 1992，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

关键思路

把 $\mathbf{r}$ 的表达式重新整理成 $\mathbf{a}$ 加上 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的组合，便可看出它是通过 A、B 和 C 的平面。该平面的一个法向量（normal）是平面上两个向量的向量积（cross product），而把这个向量积展开，恰好得出题目中的三个三重积（triple product）。此后，由于恒等式对所有 λ 和 μ 都成立，我们可以选取方便的数值。

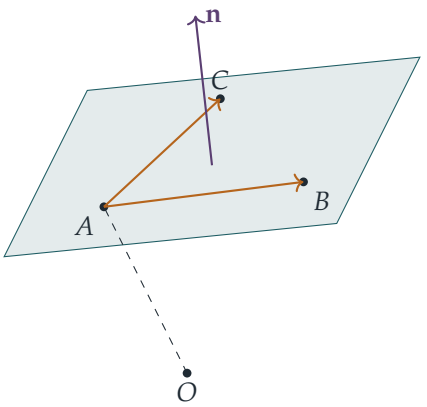
解答

轨迹

把方程改写成

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

这就是点 A 加上向量 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 与 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的任意组合。这两个向量并不平行：假如平行，A、B、C 便会共线，而一条直线连同 O 必定位于某个平面上，这与题设不符。因此，当 λ 和 μ 取遍所有实数时，$\mathbf{r}$ 扫出的就是**通过 A、B 和 C 的平面**。取 $(\lambda,\mu)=(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 便分别得到 A、B、C 三点本身。由于 O 不在平面 ABC 上，这个平面不通过原点。



方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

平面的法向量同时垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，所以我们取

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

由于这两个向量不平行，它不是零向量。展开，并利用 $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$，得

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

平面上每一点与 A 相差的向量都垂直于 $\mathbf{n}$，所以 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$。由于 $\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$，亦垂直于 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

因此平面的方程是 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$。

? **想一想** 把 $\mathbf{r}$ 的参数形式（parametric form）代入后，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ 是甚么？

我们需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$。在每一个之中，三项里都有两项消失，因为一个向量必定垂直于任何包含它的向量积：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

对于所有 λ、μ，点 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ 都在平面上，所以由 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$ 得

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

两边同时减去 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，得

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

对所有纯量 λ、μ 都成立，这正是所要证明的。

推论

由于恒等式对所有 λ 和 μ 都成立，可选取能把个别项分离出来的数值。

- $\lambda = 1, \mu = 0$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$。
- $\lambda = 0, \mu = 1$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$。

两式合起来便得

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

（换一个等价的说法：左边是 λ 和 μ 的线性式，而且恒等于零，所以 λ 的系数和 μ 的系数都必须为零。）

当 A、B、C 和 O 共面时

这时 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 全都位于同一个通过 O 的平面上。$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 垂直于该平面（或为零向量），所以 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$，其余两个三重积同样为零。从几何上看，以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 为棱的平行六面体（parallelepiped）是扁平的，体积为零。结果依然成立，但只是平凡地成立：$0 = 0 = 0$。若 A、B、C 不共线，轨迹仍然是一个平面，但它通过原点，所以 $p = 0$，其方程为 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$。若 A、B、C 共线，则 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，轨迹只是一条直线（若三点重合，则只是一个点），所以这个论证得不出任何信息。

验算

- 取 $\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = \mathbf{j}$、$\mathbf{c} = \mathbf{k}$，三个三重积都等于 1，而 $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$p = 1$：平面为 $x + y + z = 1$，它确实包含这三点。
- 我们以精确分数运算测试了 2000 组随机整数向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$：$\mathbf{n}$ 的展开式、p 的值、对随机 λ、μ 的方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$，以及三个三重积相等，全部精确成立。对于共面的向量组，每个三重积都是 0。

常见错误

- 展开 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 时出现正负号错误：$-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ 一项变成 $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，而 $-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ 变成 $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$。
- 忘记说明为何 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，而这正是用上不共面条件（经由 A、B、C 不共线）的地方。

STEP 之外

纯量三重积（scalar triple product）$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 就是以 **a**、**b**、**c** 为各行的 3×3 行列式（determinant），而这里证明的循环对称性，正是“把各行作循环置换（即两次对换）不会改变行列式的值”这一事实。它的值是以这三个向量为棱的平行六面体的有向体积，并且恰好在三个向量线性相关（linearly dependent）时为零，也就是共面的情况。在大学一年级的课程中，这会发展成把行列式视为体积缩放因子的一般理论；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对此有清晰的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。