详细解答

STEP II 1992，第 8 题

纯数学 · 积分技巧

STEP II 1992，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q8

关键思路

三个标准技巧，每部分各用一个。在 (i) 中，我们把分母彻底因式分解（factorise），并留意到有一个重复因式，因此部分分式（partial fractions）需要包含平方项。在 (ii) 中，代换（substitution）$t = \tan\frac{x}{2}$ 可把任何关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数（rational function）化为 t 的有理函数，而这里所得的二次式刚好可以漂亮地分解。在 (iii) 中，我们把 $\sinh x$ 写成指数形式，再代入 $u = \mathrm{e}^x$，结果同样归结为部分分式。

解答

第 (i) 部分

由于 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，分母是 $(x-1)^2(x+1)$。因式 $x-1$ 重复出现，所以我们设

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

即

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

代入 $x = 1$ 得 $1 = 2B$，所以 $B = \frac{1}{2}$。代入 $x = -1$ 得 $-1 = 4C$，所以 $C = -\frac{1}{4}$。比较 x^2 的系数得 $0 = A + C$，所以 $A = \frac{1}{4}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

设 $t = \tan\frac{x}{2}$。则

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

最后一式是因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+t^2)$。所以

$$3\cos x + 4\sin x = \frac{3-3t^2+8t}{1+t^2} = \frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

而因式 $1+t^2$ 互相约去：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

? **想一想** 我们怎样知道二次式 $3+8t-3t^2$ 可以因式分解？

它的判别式（discriminant）是 $64+36 = 100 = 10^2$，是一个完全平方数，所以它的根 $t = 3$ 和 $t = -\frac{1}{3}$ 都是有理数。（这并非巧合：$3^2+4^2 = 5^2$，这也正是下文的谐波形式（harmonic form）振幅为整数的原因。）

现在写 $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)} = \dfrac{a}{1+3t} + \dfrac{b}{3-t}$，于是 $2 = a(3-t)+b(1+3t)$。代入 $t = 3$ 得 $b = \frac{1}{5}$；代入 $t = -\frac{1}{3}$ 得 $\frac{10}{3}a = 2$，所以 $a = \frac{3}{5}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} &= \int \left(\frac{3}{5(1+3t)} + \frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\ln|1+3t| - \tfrac{1}{5}\ln|3-t| + c \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right| + c.\end{aligned}$$

另一方法：写 $3\cos x + 4\sin x = 5\sin(x+\beta)$，其中 $\cos\beta = \frac{4}{5}$ 及 $\sin\beta = \frac{3}{5}$。则该积分为 $\frac{1}{5}\int \operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)\right| + c$。两个答案是一致的：由于 $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$（因为 $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{3/5}{9/5}$），由复角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta) = \frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t} = \frac{1+3t}{3-t}.$$

第 (iii) 部分

由于 $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，把分子和分母同乘以 e^x 得

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

代入 $u = \mathrm{e}^x$，于是 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$
$$= \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right| + c = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c,$$

其中最后一步是把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{x/2}$：$\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}} = \tanh\frac{x}{2}$。留意这与 (ii) 的另一方法中用到的 $\int \operatorname{cosec} x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$ 何其相似。

验算

把每个答案求导。例如在 (iii) 中，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}$。数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）计算，(i) 的被积函数（integrand）的 $\int_2^5$ 为 0.548287，(ii) 的被积函数的 $\int_0^1$ 为 0.234276，而 $\int_{1/2}^2 \operatorname{cosech} x\,\mathrm{d}x$ 为 1.134488，各自与原函数（antiderivative）所得的值吻合至最少 12 个小数位。

常见错误

- 在 (i) 中，看漏了重复因式而只尝试 $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1}$，又或者根本忘记了 x^2-1 可以因式分解。
- 漏掉对数内的绝对值符号：当 $x-1$、$1+3t$ 和 $\tanh\frac{x}{2}$ 取负值时，被积函数同样有定义。
- 在 (ii) 中，忘记了来自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $\frac{2}{1+t^2}$。

STEP 之外

代换 $t = \tan\frac{x}{2}$（有时称为魏尔斯特拉斯代换，Weierstrass substitution）说明了每一个关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数都有初等原函数（elementary antiderivative），因为部分分式可以处理 t 的任何有理函数。它背后是以有理函数对单位圆作出的参数化（parametrisation），而正是这个参数化生成了所有毕氏三元数组（Pythagorean triples）。至于究竟哪些函数才有初等原函数，这类问题会引向刘维尔定理（Liouville's theorem）和微分代数（differential algebra）；关于积分的分析基础，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。