详细解答

STEP II 1992，第 7 题

纯数学 · 三次方程的重根

STEP II 1992，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q7

关键思路

把 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 与该三次多项式比较系数（comparing coefficients），便可把 p、q 和 r 表示成根的对称函数（symmetric functions）。在 (i) 中，有一个重根（repeated root），再加上“各根之和为零”，根的形式就只能是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$，其余一切皆由此而来。至于 (ii)，题目中的式子看起来就像 (i) 的答案，只是 q 和 r 换成了较复杂的东西。这提示我们把 x 平移以消去 x^2 项，然后对新的三次多项式应用 (i)。

解答

由于 a, b, c 是根，而首项系数为 1，

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

对所有 x 成立。比较系数，得

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

第 (i) 部分

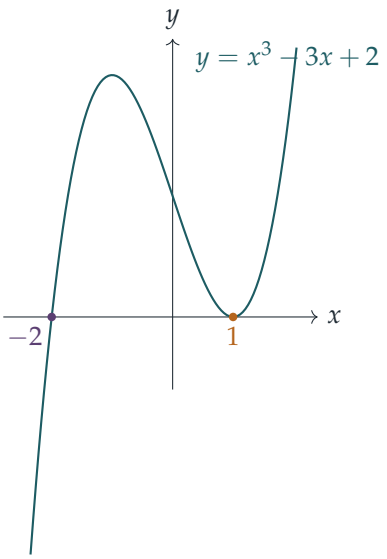
把各根标记成重根为 $a = b = \alpha$。那么由 $p = 0$ 得 $c = -(a+b) = -2\alpha$，所以三个根是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$。因此

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

于是

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

这正是所要证明的。这里完全不需要 α 是实数，而三重根的情况（$\alpha = 0$，所有系数为零）亦已包括在内。



例如，$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ 有 $\alpha = 1, q = -3, r = -2$，而 $4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$。二重根在图像上表现为曲线与横轴相切。

第 (ii) 部分

现在 p 不一定为零。原来的三次多项式各根之和为 p，所以它们的平均值是 $p/3$。按平均值平移，设

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

那么 $y = x - \frac{p}{3}$，所以关于 y 的新三次多项式的根是 $a - \frac{p}{3}, b - \frac{p}{3}, c - \frac{p}{3}$。它们的和是 $p - p = 0$，而且若 a, b, c 之中有两个相等，这三个数之中亦有两个相等。

> **想一想** 关于 y 的三次多项式究竟是甚么？

把每一项展开，

$$\begin{aligned}
\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3 + py^2 + \tfrac{p^2}{3}y + \tfrac{p^3}{27}, \\
-p\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2 - \tfrac{2p^2}{3}y - \tfrac{p^3}{9}, \\
q\left(y + \tfrac{p}{3}\right) &= qy + \tfrac{pq}{3},
\end{aligned}$$

再把这些连同 $-r$ 相加，y^2 项互相抵消（这正是平移的目的），得

$$x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y - \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right),$$

当中用到 $\frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{9} = -\frac{2p^3}{27}$。这个关于 y 的三次多项式具有 $y^3 - Py^2 + Qy - R$ 的形式，其中

$$P = 0, \qquad Q = q - \frac{p^2}{3}, \qquad R = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

它的 y^2 系数为零，并且有两个相等的根，所以第 (i) 部分适用，得出 $4Q^3 + 27R^2 = 0$，即

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 = 0,$$

这就是所求的结果。

验算

- 当 $p = 0$ 时，(ii) 的结果简化为 $4q^3 + 27r^2 = 0$，即第 (i) 部分。
- 对于 $(x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$，我们有 $p = 4, q = 5, r = 2$，所以 $Q = -\frac{1}{3}$ 而 $R = \frac{128}{27} - \frac{20}{3} + 2 = \frac{2}{27}$。于是 $4Q^3 + 27R^2 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 0$。
- 我们亦以精确的有理数运算，在数百个随机选取、带有重根的三次多项式上测试了这两个恒等式，并在随机选取的点上检验了平移恒等式。

常见错误

- 韦达定理（Vieta's formulae）中的正负号出错：本题选用的符号是 $-p, +q, -r$，因此 p, q, r 三者以根表示时全部带正号。
- 按 $p/3$ 平移时弄错方向。新三次多项式的根是 $a - \frac{p}{3}$ 等等，正因如此它们的和才是零。
- 在 (ii) 中硬用 a, a, c 把所有式子展开。这样做行得通，但过程冗长又容易出错；平移则可不费工夫地重用 (i)。

STEP 之外

对一般的三次多项式，(ii) 的左方等于 $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$，即判别式（discriminant）的相反数。它恰好在有两个根重合时等于零，而它的正负号则告诉你一个实系数三次多项式是有三个实根还是只有一个。平移 $x = y + \frac{p}{3}$ 亦是以卡尔达诺公式（Cardano's formula）解三次方程的第一步。根的对称函数、判别式，以及哪些方程可用根式求解（solved by radicals）的问题，都通往伽罗瓦理论（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。