详细解答

STEP II 1992，第 6 题

纯数学 · 切线与根的计数

> **STEP II 1992，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q6

关键思路

方程 $kx = \ln(2\sec x)$ 的解，就是通过原点的直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln(2\sec x)$ 相交的点。这条曲线从原点上方出发，是凸（convex）的，并且急升至无穷大，所以通过原点的直线要么与它不相交，要么与它相切，要么与它相交两次。特殊值 k_0 就是由原点所作切线的斜率（gradient）。相切（tangency）的意思是两条曲线在该点高度相同、斜率也相同，而其余一切都可以由这两条方程推出。

解答

两个图像

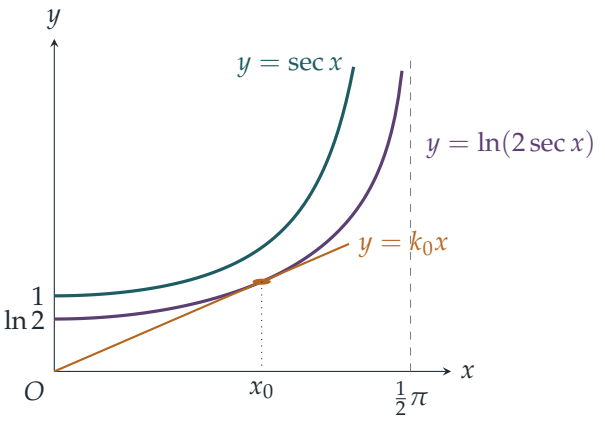
设 $f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$。则

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

所以 $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$，$f'(0) = 0$，$f$ 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增，它是凸的（向上凹），而且当 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 时 $f(x) \to \infty$，因为 $\cos x \to 0^+$。

同样地，$y = \sec x$ 满足 $\sec 0 = 1$，斜率为 $\sec x \tan x$，在 $x = 0$ 处为 0，其后为正，而且当 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 时 $\sec x \to \infty$。两条曲线都以 $x = \frac{1}{2}\pi$ 为铅垂渐近线（vertical asymptote），并且在该处都没有定义。

对数曲线永远位于正割曲线的下方。设 $u = \sec x \geq 1$，则有 $\ln(2u) < u$，因为 $\ln(2u) - u$ 的导数（derivative）是 $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$，所以它不会超过它在 $u = 1$ 处的值，即 $\ln 2 - 1 < 0$。对数曲线的增长也慢得多：当 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 时，它的表现就像正割的 ln。



k 小时无解，k 大时有两个解

由于 f 递增，在 $[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上有 $f(x) \geq \ln 2$，而在该处 $kx < \frac{1}{2}\pi k$。若 $k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$，则处处都有 $kx < \ln 2 \leq f(x)$，所以直线从曲线下方经过，方程无解。

当 k 大时，直线起初在曲线下方（在 $x = 0$ 处它的高度是 $0 < \ln 2$），但它够陡，会在某处升到曲线之上：在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 处曲线的高度是 $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$，只要 $k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$，直线在该处就较高。在 $\frac{1}{2}\pi$ 附近，曲线趋向无穷大，而直线的高度始终不超过 $\frac{1}{2}\pi k$，所以曲线最终又回到直线之上。直线先向上穿过曲线，然后又向下穿过一次：有两个解。

解不可能多于两个。函数 $f(x) - kx$ 的二阶导数（second derivative）是 $\sec^2 x > 0$，所以它是凸的，而凸函数最多只有两个零点。

为何 k_0 存在

由于 $f(0) = \ln 2 \neq 0$，每个解都满足 $x > 0$，所以我们可以除以 x，把方程改写成

$$k = g(x), \qquad \text{其中} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以解的数目就是 g 的图像到达高度 k 的次数。现在

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

而 $h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$。由于 $h(0) = -\ln 2 < 0$，而且当 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 时 $h(x) \to \infty$，h 恰好有一个零点 x_0。所以 g 在 $(0, x_0)$ 上递减，在 $(x_0, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增，而且在两端都有 $g \to \infty$（当 $x \to 0$ 时分子趋向 $\ln 2$，当 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 时分子趋向 ∞）。因此，取 $k_0 = g(x_0)$，即 g 的最小值，便有：

- $k < k_0$：无解；
- $k = k_0$：恰好有一个解，$x = x_0$；

► $k > k_0$：有两个解。

从图像来看，$y = k_0 x$ 就是 $y = \ln(2\sec x)$ 的通过原点的切线。这印证了草图的论证，并准确地确定了临界值。

想一想 为甚么“恰好有一个解”就表示直线是切线?

假如直线在 x_0 处横截地穿过曲线，那么把它绕 O 稍微转动（令 k 稍为减小或增大），附近仍然会有一个交点，而上面的凸性论证又会给出第二个交点。一个单一而孤立的交点，在 k 减小时变成没有交点，这正正就是切点。用代数来说，这就是 $h(x_0) = 0$，即 $g'(x_0) = 0$。

x_0 所满足的方程

在切点处，直线与曲线的高度相同，斜率也相同：

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

（把两式合起来，就是上面的 $h(x_0) = 0$。）把第二式代入第一式，得 $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$，而由于 $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$，$\tan x_0 \neq 0$，所以

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

这正是所要证明的。

求 x_0 和 k_0

我们很自然会想直接用 $x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$ 来迭代（iterate）。这样做收敛（converge）得很慢：右边在 x_0 处的导数是 $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$，所以迭代值会来回振荡，每一步只能逼近约 11%。对 $h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$ 使用牛顿法（Newton's method）则好得多，而且 $h'(x) = x\sec^2 x$ 十分简单：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

由 $x_1 = 1$ 开始（全部以弧度（radian）计算）：

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

为确认准确至两位小数，我们检查符号有否改变：$h(0.905) \approx -0.023 < 0$ 而 $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$，所以 $0.905 < x_0 < 0.915$，于是

$$x_0 \approx 0.91.$$

然后 $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$。等价地，$k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$，所得的值相同。

验算

- k_0 的两个表达式互相吻合：$\tan(0.91440) \approx 1.2981$ 而 $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$。
- 以数值方法在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上扫描 $g(x) = \ln(2\sec x)/x$，得最小值为 1.2981，位于 $x \approx 0.914$。
- 数算 $kx - \ln(2\sec x)$ 的符号改变次数：$k = 1.29$ 时没有根，$k = 1.31$ 时有两个根。
- 答案符合先前求得的粗略界限：$0.44 < k_0 < 1.32$。

常见错误

- 使用角度制。这里每一个 x 的值，包括牛顿法的迭代值和 $\tan x_0$，都必须以弧度计算。
- 只列出一条相切的方程。与曲线相交并不足够：斜率也必须相等，而正是这第二个条件确定了 k_0。
- 未经检查就声称准确至两位小数。应展示 h 在 $[0.905, 0.915]$ 两端符号相反，或者一直迭代至第二位小数稳定下来。

STEP 之外

通过考察 $f(x)/x$ 的值域（range）来数算 $kx = f(x)$ 的根的数目，是一个重要思想的一小部分。通过原点的切线，加上 f 的凸性，正是勒让德变换（Legendre transform）和凸对偶（convex duality）的基础，在分析学和力学中都是如此。牛顿法在这里收敛得这么快，是因为它在单根（simple root）附近是二次收敛（quadratically convergent）的，而不动点迭代（fixed-point iteration）只是线性收敛，比率为 $|\varphi'(x_0)|$。这两个事实在分析学或数值方法的入门课程中都会证明。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）涵盖了凸函数以及牛顿法的误差分析。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。