详细解答

STEP II 1992，第 4 题

纯数学 · 微分法的公理

> **STEP II 1992，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 6.5 节从公理出发的微分法中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/derivations.html

关键思路

这四条规则正是我们熟悉的求导（differentiation）性质：乘积法则（product rule）、线性（linearity）以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$。题目要我们证明，单凭这些性质，就足以完全确定这个运算在多项式（polynomial）上的作用。处理常数的窍门，是把一个我们早已知道结果的乘积交给乘积法则，例如 $1 \times 1 = 1$。之后，乘积法则会逐步建立 x 的每一个幂，余下的则由线性处理。

在整个过程中，我们只可使用题目给出的四条规则。不能因为 $\Diamond$ 看起来像求导，就假设它具有任何性质；这正是我们要证明的事。

解答

常数

> ? **想一想** 我们对 $\Diamond 1$ 一无所知。这些规则怎样能告诉我们它是甚么？

把乘积法则 (i) 应用于多项式 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = 1$。它们的乘积仍是 1，所以

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\,\Diamond 1.$$

两边同时减去 $\Diamond 1$，得 $\Diamond 1 = 0$，即零多项式（zero polynomial）。

现设 $\mathrm{f}(x) = c$ 为任意常数多项式。则 $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$，而 c 是常数，所以由规则 (iv) 得

$$\Diamond c = \Diamond(c \cdot 1) = c \Diamond 1 = c \cdot 0 = 0.$$

这也涵盖了 $c = 0$ 的情况，所以对每一个常数多项式都有 $\Diamond \mathrm{f}(x) = 0$，正如所求。

（求得 $\Diamond 1 = 0$ 的另一途径：写成 $x = x \cdot 1$，则由规则 (i) 和规则 (iii) 得 $1 = 1 \cdot 1 + x \Diamond 1$，因此 $x \Diamond 1 = 0$，而一个多项式乘以 x 后得 0，它必定是零多项式。）

幂 x^2 和 x^3

取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$ 并使用乘积法则，再用规则 (iii)，

$$\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x \Diamond x + x \Diamond x = x + x = 2x.$$

接着，$x^3 = x^2 \cdot x$，所以由乘积法则、规则 (iii) 和刚刚得到的结果，

$$\Diamond x^3 = x \Diamond x^2 + x^2 \Diamond x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

任意多项式

*第 1 步：x 的幂。*我们用归纳法（induction）证明

$$\Diamond x^n = nx^{n-1} \qquad \text{对每一个整数} n \geq 1.$$

当 $n = 1$ 时，这就是规则 (iii)。假设它对某个 $n = k \geq 1$ 成立。写成 $x^{k+1} = x^k \cdot x$ 并使用乘积法则，再用规则 (iii) 和归纳假设（induction hypothesis），

$$\Diamond x^{k+1} = x \Diamond x^k + x^k \Diamond x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

所以结果对 $n = k+1$ 成立。由归纳法，它对所有 $n \geq 1$ 成立。当 $n = 0$ 时，$x^0 = 1$ 是常数，所以由第一部分得 $\Diamond x^0 = 0$。在每一种情况下都有 $\Diamond x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$。

*第 2 步：和。*规则 (ii) 只是就两个多项式而言，但对项数作归纳，便可把它推广至任意有限和：若 $\Diamond(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \Diamond \mathrm{f}_1 + \cdots + \Diamond \mathrm{f}_m$，则把规则 (ii) 应用于 $(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$，便得到 $m+1$ 项时的同一命题。

*第 3 步：综合起来。*任意多项式都可写成 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，其中系数 a_k 为常数。先用第 2 步，再对每一项用规则 (iv)，然后用第 1 步，

$$\begin{aligned}
\Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond(a_0) + \Diamond(a_1 x) + \cdots + \Diamond(a_n x^n) \\
&= a_0 \Diamond 1 + a_1 \Diamond x + \cdots + a_n \Diamond x^n \\
&= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big),
\end{aligned}$$

这正是我们要证明的结果。

验算

值得确认一下求导确实满足全部四条规则，否则这个结果便会流于空泛；它确实满足（乘积法则、线性以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$）。我们亦按照解答中的做法，只用这四条规则在电脑上构作了 $\Diamond$，并以 500 个次数不超过 7、系数为分数的随机多项式，把它与普通的导数（derivative）作比较。两者每次都一致，并且与数值差商（difference quotient）吻合；例如由这些规则可得 $\Diamond x^3 = 3x^2$。

常见错误

- 说“$\Diamond c = 0$，因为常数的导数是零”。这是假设了我们要证明的事；这个零必须由规则推出。
- 在最后一部分遗漏常数项。归纳法只由 $n = 1$ 开始，所以 a_0 需要用到关于常数的结果。
- 对多项之和使用规则 (ii)，却没有指出它是藉归纳法由两项推广而来。

STEP 之外

满足规则 (i)、(ii) 和 (iv) 的运算称为导子（derivation），代数和几何中处处都会研究导子。本题说明，在多项式上，导子完全由它在 x 上的值决定。更一般地，$\Diamond \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$，其中 $\mathrm{p} = \Diamond x$；在微分几何（differential geometry）中，这个想法成为向量场（vector field）的定义。至于多项式环（polynomial ring）这个代数背景，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。