详细解答

STEP II 1992，第 3 题

纯数学 · 内摆线与面积

STEP II 1992，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q3

关键思路

一切都源自*纯滚动而不滑动*（rolling without slipping）：小圆沿大圆滚过的弧长，等于小圆上曾经与大圆接触的弧长。这就决定了小圆转了多少，于是 B 不过是“圆心 P 加上一个方向正确的单位向量（unit vector）”。至于描绘曲线，值得留意的是，利用三倍角公式（triple-angle formulae），坐标可以化简得非常简洁。

解答

求 B 的坐标

由于小圆（半径为 1）一直与大圆（半径为 4）的内侧相切，它的圆心与 O 的距离恒为 $4-1=3$。设 ϕ 为角 AOP，则

$$P=(3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

设 T 为当前的切点（point of contact）。它位于射线 OP 的延长线上，所以 $T=(4\cos\phi, 4\sin\phi)$，而由 P 到 T 的方向与 x 轴成角 ϕ。

起初 B 位于切点 A。由于没有滑动，大圆上的弧 AT 与小圆上的弧 BT 长度相同：

$$4\phi = 1\times\angle BPT \quad\Longrightarrow\quad \angle BPT = 4\phi.$$

想一想 在 P 处量度，B 所在的角度是 $\phi+4\phi$ 还是 $\phi-4\phi$?

当 P 绕 O 逆时针移动时，小圆沿大圆的内侧滚动，因此是*顺时针*转动的（见图中箭头）。点 B 是较早时的切点，所以它落在新切点 T 的后面：沿小圆由 T 到 B 是顺时针转了 4ϕ。

因此方向 $\overrightarrow{PB}$ 与 x 轴成角 $\phi - 4\phi = -3\phi$，又因为 $PB = 1$，

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

正如所求。（验算：$\phi = 0$ 给出 $(4, 0) = A$。）

描绘 C

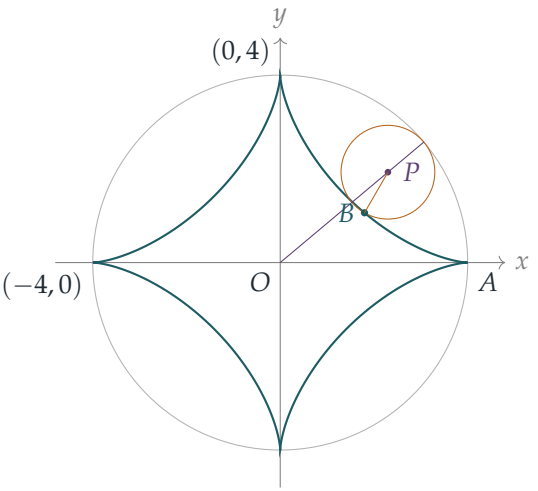
利用 $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ 及 $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$，

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

所以 C 是曲线 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$，即星形线（astroid）。它有以下特征：

- B 在大圆上，当且仅当 $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$，即 $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$，对应的点为 $(\pm 4, 0)$、$(0, \pm 4)$。这时 B 就是切点，所以它瞬时静止，曲线在该处有一个尖点（cusp）。
- 曲线对两条坐标轴都对称（把 ϕ 换成 $-\phi$ 或 $\pi - \phi$）。
- 在第一象限，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$，所以曲线沿 x 轴方向离开 $(4, 0)$，并沿 y 轴方向到达 $(0, 4)$。曲线向内弯曲：当 $\phi = \frac{\pi}{4}$ 时它通过 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，远在直线 $x + y = 4$ 之内。

P 绕行一周（ϕ 由 0 到 2π）之后，小圆相对于 OP 转了 3 圈，而 B 回到 A，所以 C 是一条有四个尖点的闭曲线（closed curve）。



面积

我们有 $x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

所以

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

在一个完整周期上，对任何整数 $k \neq 0$ 都有 $\int_0^{2\pi}\cos^2 k\phi\,\mathrm{d}\phi = \pi$（把被积函数写成 $\frac{1}{2}(1+\cos 2k\phi)$），而

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi\cos 3\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

因此

$$\text{面积} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

答案为正数，这是应有的结果：随着 ϕ 增加，B 沿 C 逆时针绕行。

验算

- 由于 C 向内弯曲，所围区域位于以四个尖点为顶点的正方形之内，该正方形的面积为 32；而确实 $6\pi \approx 18.85 < 32$。
- 数值上，对该积分使用辛普森法则（Simpson's rule），以及用鞋带公式（shoelace formula）计算 C 的内接 200 000 边形的面积，两者都给出 $18.8496\ldots = 6\pi$。
- 标准的星形线公式（面积为 $\frac{3}{8}\pi a^2$），取 $a = 4$，同样给出 6π。
- 在每个尖点处，B 的速率的数值结果为零，印证了 B 碰到大圆时处于静止状态，与滚动的要求完全吻合。

常见错误

- 把 $\overrightarrow{PB}$ 的角度取为 $+5\phi$ 或 $+3\phi$：小圆的转动方向与 P 绕 O 运动的方向相反。
- 计算 P 的路径时用了半径 4 而不是 3。
- 把尖点画成圆滑的末端，或把弧画成向外凸出。

STEP 之外

一个圆在另一个圆内滚动时，圆上一点所描出的曲线称为*内摆线*（hypocycloids）；在外面滚动则得到*外摆线*（epicycloids）。当半径之比为 $4:1$ 时，我们得到星形线；比为 $3:1$ 时，则得到有三个尖点的三尖瓣线（deltoid）。面积公式 $\int x\,\mathrm{d}y$ 是格林定理（Green's theorem）的特殊情况，该定理把沿闭曲线的积分与曲线所围区域上的二重积分（double integral）联系起来；它是大学一年级向量微积分（vector calculus）的一大亮点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）利用 $z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$ 优雅地处理了这些滚动曲线。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。