详细解答

STEP II 1992，第 2 题

纯数学 · 克莱罗微分方程

> **STEP II 1992，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q2

关键思路

这条方程的形式是 $y = xp - f(p)$，其中 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，称为克莱罗方程（Clairaut equation）。求导一次后，麻烦的 p 项会互相抵消，余下的式子可以因式分解成两条简单得多的方程。要留意的是，求导会丢失信息（常数消失了），所以每个候选解都必须代回 $(*)$，才能定出当中的常数。

解答

设 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 $(*)$ 可写成 $y = xp - \cosh p$。

求导

把等式两边对 x 求导，对 xp 用积法则（product rule），对 $\cosh p$ 用链式法则（chain rule）：

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

两边的 p 互相抵消，余下

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x - \sinh p) = 0, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

乘积为零，当且仅当其中一个因子为零，所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 或 $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$，正是题目所求。

两条方程

第一条方程。把 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$ 积分两次，得通解（general solution）

$$y=Ax+B,\qquad A,B\text{ 为任意常数。}$$

第二条方程。这里 $\sinh p=x$。由于 sinh 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射（bijection），所以对每个 x 都有 $p=\sinh^{-1}x$。用分部积分法（integration by parts），取 $u=\sinh^{-1}x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}y&=\int \sinh^{-1}x\,\mathrm{d}x=x\sinh^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\\&=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}+C,\qquad C\text{ 为任意常数。}\end{aligned}$$

$(*)$ 的解

$(*)$ 的每个解都满足上面推导出的两条方程之一，但反过来却不成立，因为求导时丢掉了一个条件。所以我们要把每一族解代回 $(*)$。

> **想一想** 推导出的两条方程分别有两个和一个任意常数。为甚么这些解不可能全部都满足像 $(*)$ 这样的一阶方程?

一阶方程的解应该是单参数族，而上面每一族解不是常数太多，就是有一个尚未验证的常数。把 $(*)$ 求导，只能告诉我们 $y-xp+\cosh p$ 是常数；我们还需要这个常数等于零。

直线。当 $y=Ax+B$ 时，$p=A$，于是 $(*)$ 变成

$$Ax+B=Ax-\cosh A\iff B=-\cosh A.$$

所以我们得到单参数的直线族

$$y=Ax-\cosh A,\qquad A\in\mathbb{R}.$$

另一条曲线。当 $y=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}+C$ 时，$p=\sinh^{-1}x$，所以 $\sinh p=x$，而 $\cosh p=\sqrt{1+\sinh^2 p}=\sqrt{1+x^2}$（因为 $\cosh p>0$，故取正根）。于是 $(*)$ 的右边是

$$xp-\cosh p=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2},$$

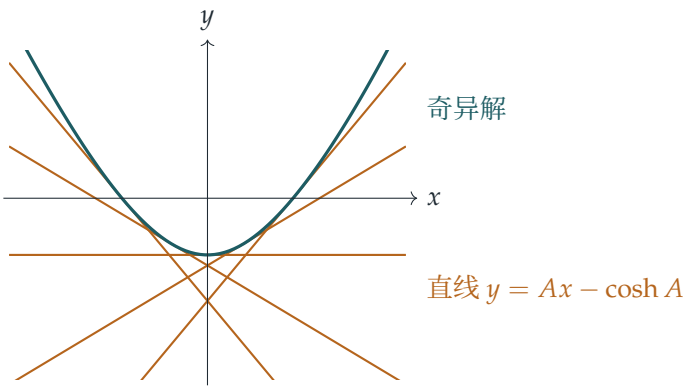
它等于 y，当且仅当 $C=0$。这样便多得一个解，当中不含任意常数：

$$y=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}.$$

因此，$(*)$ 的解是直线 $y=Ax-\cosh A$（A 为任意实数），加上单独一条曲线 $y=x\sinh^{-1}x-\sqrt{1+x^2}$。

两者如何配合

斜率为 A 的直线在 $x = \sinh A$ 处与曲线相切。在该处，曲线的斜率是 $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$，高度是 $A\sinh A - \cosh A$，与直线的相同。曲线的 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$，所以它是凸（convex）的，而每一条这样的切线都位于它的下方。这条曲线是该直线族的包络线（envelope），称为奇异解（singular solution）。



这也解释了一个微妙之处：由于条件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$ 是逐点成立的，一个解可以在两种类型之间切换。例如，沿着曲线走到 $x = \sinh A$，然后改沿该处的切线继续走，所得的函数有连续的导数，而且仍然处处满足 $(*)$。这类分段的解都是由上面找到的解拼合而成的，而题目预期的答案是直线族加上奇异曲线。

验算

- 当 $A = 0$ 时，直线是 $y = -1$，而曲线有 $y(0) = 0 - 1 = -1$，斜率为 $\sinh^{-1} 0 = 0$：两者在 $(0, -1)$ 相切，与预期相符。
- 数值上，取 $x = 0.7$：$\sinh^{-1} 0.7 \approx 0.6527$，所以曲线给出 $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$，而 $xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$，两者吻合。在 y 上加上任何 $C \neq 0$，都会刚好相差 C。
- 在随机选取的点上用有限差分（finite differences）检验 $(*)$，每一条直线 $y = Ax - \cosh A$ 和奇异曲线的残差都只有舍入误差的大小。

常见错误

- 做到 $y = Ax + B$ 或 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ 便停下来：这些只是求导后的方程的解，而 $(*)$ 本身要求 $B = -\cosh A$ 和 $C = 0$。

▶ 把因子 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ “约去”，以致完全漏掉奇异解。

STEP 之外

形如 $y = xp - f(p)$ 的方程就是克莱罗方程。它们的通解永远是直线族 $y = cx - f(c)$，而奇异解就是这个直线族的包络线。这里 $f = \cosh$，而包络线 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}$ 是 cosh 的勒让德变换（Legendre transform），这种构造在力学（由拉格朗日量（Lagrangian）过渡到哈密顿量（Hamiltonian））和热力学中都会出现。这个例子也说明，当存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的条件不成立时，一阶方程的解不一定唯一。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）涵盖一阶方程和这条唯一性定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。