详细解答

STEP II 1992，第 15 题

概率与统计 • 随机漫步

STEP II 1992，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q15

关键思路

若该点在 s 步之中有 R 步向正方向走，它最后会停在 $x = R - (s - R) = 2R - s$，而 R 服从二项分布（binomial distribution）。因此，这里每一个概率都是若干个二项式系数（binomial coefficients）之和。奇偶性（parity）帮了很大的忙：走了偶数步之后，只可能到达 $x = 2$ 和 $x = 4$；走了奇数步之后，只可能到达 $x = 3$ 和 $x = 5$，所以每个 $\mathrm{P}(s)$ 都只是两个相邻二项式系数之和。帕斯卡法则（Pascal's rule）随即把这个和化简为单一个系数。至于最大值，则要考察相邻两项之比（ratio），并把 s 为偶数和奇数的情况分开处理。

解答

设 R 为首 s 步中向正方向走的步数。各步互相独立（independent），每一步向正方向走的概率为 $\frac{1}{2}$，所以 $R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$，而且

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

走了 s 步之后的位置是 $X = 2R - s$，所以 $X = x$ 当且仅当 $R = \frac{1}{2}(s + x)$。特别地，X 的奇偶性与 s 相同。

$\mathrm{P}(5)$ 与 $\mathrm{P}(6)$ 的值

当 $s = 5$ 时，只有 $x = 3$ 和 $x = 5$ 可能出现，分别需要 $R = 4$ 和 $R = 5$：

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

当 $s=6$ 时，只有 $x=2$ 和 $x=4$ 可能出现，分别需要 $R=4$ 和 $R=5$：

$$\mathrm{P}(6)=\left[\binom{6}{4}+\binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6}=\frac{15+6}{64}=\frac{21}{64}.$$

一般的偶数情况

当 $s=2k$ 时，可能到达的目标点是 $x=2$ 和 $x=4$，分别需要 $R=k+1$ 和 $R=k+2$。根据帕斯卡法则 $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$，

$$\mathrm{P}(2k)=\left[\binom{2k}{k+1}+\binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

最后一步用了 $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$，其中 $(2k+1)-(k+2)=k-1$。这就是所要求的结果。它在 $k=1$ 时同样成立：这时 $\binom{2}{3}=0$，所以 $x=4$ 的那一项根本不存在，而公式给出 $\frac{1}{4}$，正是两步都向正方向走的概率。

奇数情况

当 $s=2k+1$ 时，目标点是 $x=3$ 和 $x=5$，分别需要 $R=k+2$ 和 $R=k+3$。同理，

$$\mathrm{P}(2k+1)=\left[\binom{2k+1}{k+2}+\binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

当 $k=2$ 时，这给出 $\binom{6}{1}/32=\frac{3}{16}$，与 $\mathrm{P}(5)$ 吻合。

最大值

对 $k\geq 1$ 记 $a_k=\mathrm{P}(2k)$，并对 $k\geq 1$ 记 $b_k=\mathrm{P}(2k+1)$（留意 $b_0=\mathrm{P}(1)=0$）。这些数全是正数，所以我们可以用比值来比较相邻两项。

> **想一想** 两个二项式系数之比应该怎样化简？

把两者都写成阶乘（factorials）再约简。对于偶数项，

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}}=\frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

所以

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

由于分母是正数，这个比值大于 1 当且仅当 $10k+6>12k$，即 $k<3$；当 $k=3$ 时它等于 1；而当 $k>3$ 时它小于 1。因此

$$a_1<a_2<a_3=a_4>a_5>a_6>\cdots,$$

而偶数步的最大值是 $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$。（验算：$\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$。）

对于奇数项，同样的约简给出

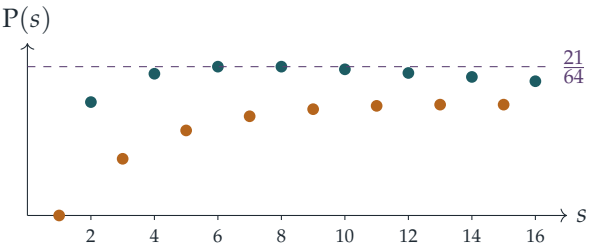
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

它在 $k < 6$ 时大于 1，在 $k = 6$ 时等于 1，在 $k > 6$ 时小于 1。所以奇数步的最大值是

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

最后，$\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$，所以没有任何奇数步的值能超过偶数步的最大值。因此 $\mathrm{P}(s)$ 取得最大值 $\frac{21}{64}$ 的时候，是

$$s = 6 \quad 及 \quad s = 8.$$



蓝绿色的点对应偶数 s，琥珀色的点对应奇数 s：这是两个独立的数列，各自先升后降，而偶数的那个始终在上方。

验算

- 用手计算小的情况：$\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$（两步都向右），$\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$（三步都向右）；而取 $k = 1$ 时，公式给出 $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$ 和 $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$，正如所料。
- 用电脑对这个漫步作精确穷举（以分数运算，$s \le 60$），结果证实两条公式都正确，$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$ 是整体的最大值，而 $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$ 是奇数步的最大值。

常见错误

- 对每个 s 都把全部四个目标点加起来：基于奇偶性，其中一半根本不可能到达。
- 求出偶数步的最大值便停下来。奇数步的值构成另一个独立的数列，你必须验证它的峰值较低。

- 停在“比值 > 1 对 $k < 3$ 成立”便只答 $s = 6$：比值在 $k = 3$ 时等于 1，所以 $s = 8$ 与它并列。

STEP 之外

这就是简单对称随机漫步（simple symmetric random walk），是概率论的核心对象之一。走了 s 步之后，它的位置扩散的幅度大约与 $\sqrt{s}$ 成正比，所以它落在任何一个固定有限范围内的概率会先上升，最终下降至零；$s = 7$ 附近的峰值，正是扩散幅度与该范围大小相若的时候。同样的二项式计数方法还会引出反射原理（reflection principle），以及一维漫步以概率 1 返回原点这个事实。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）中有一章讲随机漫步，写得很好。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。