详细解答

STEP II 1992，第 14 题

力学 · 连接质点与滑轮

STEP II 1992，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s2-q14

关键思路

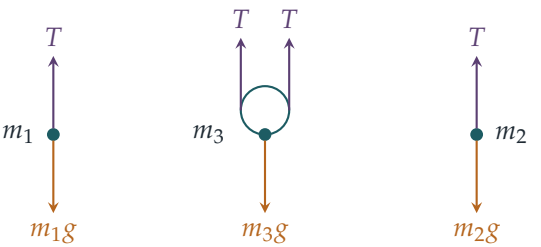
系统中有三个运动的物体，但只有一条绳，所以整条绳的张力（tension）都是同一个 T，而三个加速度（acceleration）之间只有一个约束条件。对每个质点写出牛顿第二定律（Newton's second law）（滑轮 P_3 与挂在它上面的质点一起运动），再写出绳长条件，便得到四个未知数的四条线性方程。至于静止的条件，不过是说 P_3 的加速度为零。

解答

模型

滑轮（pulley）光滑而轻，绳轻而不可伸长（inextensible），所以整条绳上的张力处处相同，都等于 T。由于 P_3 是轻滑轮，它与质量为 m_3 的质点合成一个质量为 m_3 的物体，由两段竖直的绳吊着，每段绳都以力 T 把它向上拉。

所有位移一律以向下为正：设 x_1、x_2、x_3 分别为质点 m_1、质点 m_2 和滑轮 P_3 在固定滑轮以下的深度，对应的加速度为 a_1、a_2、a_3（向下为正）。



运动方程

对每个物体沿竖直方向分解（向下为正）：

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T, \\ m_3 a_3 &= m_3 g - 2T. \end{aligned}$$

绳的约束条件

略去绕在滑轮上的固定长度不计，这条绳由以下各段组成：由 P_1 垂下至 m_1 的一段（长度 x_1）、由两个固定滑轮垂下至 P_3 的两段（每段长度 x_3），以及由 P_2 垂下至 m_2 的一段（长度 x_2）。由于绳不可伸长，

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{常数}, \qquad \text{所以} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

后一式由前一式求导两次而得。

> **想一想** 为甚么 x_3 的系数是 2 而不是 1？

当 P_3 下降距离 d 时，吊着它的两段绳都各自长了 d，所以共用去 $2d$ 的绳。这些绳只能来自外侧的两段，因此 $x_1 + x_2$ 减少 $2d$。漏掉这个因子，是这道题最常见的出错原因。

张力

把每条运动方程除以对应的质量，

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

代入 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$：

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

全式乘以 $m_1 m_2 m_3$，再解出 T，

$$\boxed{T = \frac{4 m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2}}$$

这个结果在整个运动过程中都成立（直至有质点碰到滑轮为止），因为方程中没有任何一项与位置有关。

P_3 保持静止的情况

系统由静止开始运动，所以 P_3 保持静止，当且仅当 $a_3 = 0$，即 $2T = m_3 g$。代入上面求得的 T：

$$\begin{aligned} \frac{8m_1m_2m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2} &= m_3 g \\ \iff \quad 8m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2 \\ \iff \quad 4m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2), \end{aligned}$$

其中我们除以了 $m_3 g > 0$，并乘以了为正数的分母。所以若 $4m_1m_2 = m_3(m_1+m_2)$，则 $a_3 = 0$，P_3 保持静止，正是所要证明的。（每一步都可逆，所以这个条件既是充分条件，也是必要条件。）

要留意，外侧的两个质点不一定静止：这时 $T = \frac{1}{2}m_3 g$，而 $a_1 = g - T/m_1 = -a_2$，除非 $m_1 = m_2$，否则不为零。一个质点上升，另一个以相同的快慢下降，绳在 P_3 下面滑过，却没有带动它。

验算

- 对称情况 $m_1 = m_2 = m$：条件变成 $4m^2 = 2mm_3$，即 $m_3 = 2m$。这不过是静力平衡，$2T = 2mg = m_3 g$：结果显而易见，也令人放心。
- 若 $m_3 \to \infty$，则 $T \to \dfrac{4m_1m_2 g}{m_1+m_2}$，是大家熟悉的阿特伍德机（Atwood machine）张力 $\dfrac{2m_1m_2 g}{m_1+m_2}$ 的两倍。这是合理的：很重的 P_3 近乎自由下落，$a_3 \to g$，所以各段绳加速得很快。若 $m_3 \to 0$，则 $T \to 0$，因为无质量的滑轮不能承受任何净力。
- 数值上，取 $m_1 = 2$、$m_2 = 3$、$m_3 = 4$ 及 $g = 9.8$（国际单位制），公式给出 $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$。另外用能量方法（拉格朗日方法，Lagrangian method）独立求解，得到相同的加速度 $a_1 \approx -0.891$、$a_2 \approx 2.673$、$a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。取 $m_1 = 1$、$m_2 = 3$、$m_3 = 3$ 时，静止条件成立，而果然 $a_3 = 0$，同时 $a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。

常见错误

- 把约束条件写成 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$，忘记了 P_3 是挂在两段绳上的。
- 忘记了作用在 P_3 上的力是 $2T$，而不是 T。
- 以为 P_3 静止，整个系统就必定静止。除非 $m_1 = m_2$，否则并非如此。

STEP 之外

约束条件 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 常数 把系统的自由度（degrees of freedom）减至两个，而处理这类系统最简洁的方法是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）：只要用独立的坐标写出能量，就完全用不着张力（它是一种“约束力”（constraint force））。我们的数值验算正是这样做的。你会在大学一年级的动力学课程中学到它。想看看牛顿定律怎样严谨地应用于滑轮这类受约束的系统，Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）是个好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。