详细解答

# STEP II 1992，第 13 题

力学 · 摩擦力与连接质点

**STEP II 1992，第 13 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

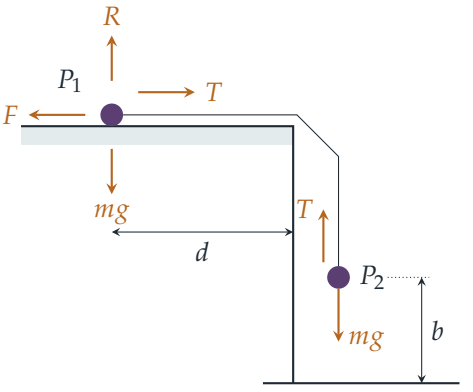
step.maths.org/questions/92-s2-q13

## 关键思路

整个运动分为两个阶段。$P_2$ 下坠期间，绳子拉紧，两个质点（particle）以同一个加速度一起运动。$P_2$ 一撞到地面，绳子便松弛，$P_1$ 只会在摩擦力（friction）作用下滑行至停下。一切都取决于碰撞一刻的速率：第一部分是把停下所需的距离与距离桌边尚余的距离作比较，第二部分则是比较两段时间。

## 解答

我们把 $P_1$ 和 $P_2$ 视为质点，并把绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），绕过光滑的桌边，因此整条绳子的张力（tension）$T$ 处处相同。桌面对 $P_1$ 而言是粗糙的。我们假设 $b < d$，使得 $P_2$ 在 $P_1$ 到达桌边之前已经着地（绳子的长度此后再无作用）。



## 第一部分

**第一阶段：绳子拉紧**。对 $P_1$ 沿竖直方向分解力，得 $R = mg$。它正在滑动，所以摩擦力达到极限值（limiting friction）：$F = \mu R = \mu mg$，方向与运动相反。设共同加速度为 $a$，

$$P_2 \text{ (向下)}: \quad mg - T = ma,$$
$$P_1 \text{ (朝向桌边)}: \quad T - \mu mg = ma.$$

两式相加，$2ma = mg(1-\mu)$，所以 $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$；由于 $\mu < 1$，这是正数，系统确实会开始运动。$P_2$ 由静止下坠距离 $b$，所以它到达地面时的速率 $V$ 满足

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

此刻 $P_1$ 的速率同样是 $V$，而且它已移动了距离 $b$，所以它距离桌边 $d-b$。

**第二阶段：绳子松弛**。碰撞之后，$P_2$ 在地面上或正在向上弹起，而 $P_1$ 继续向桌边移动，所以绳子松弛，$T = 0$。

> **想一想** 为甚么 $P_2$ 弹跳期间绳子不会再次拉紧?

碰撞一刻绳子刚好拉紧。其后 $P_1$ 向桌边靠近，让更多绳子越过桌边垂下，而 $P_2$ 不会低于地面，所以它所需的绳子不会比碰撞时多。绳子自此一直保持松弛。

因此 $P_1$ 只以 $\mu g$ 减速，并在再移动距离

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

之后停下，前提是它没有先到达桌边。故此 $P_1$ 掉下桌子，当且仅当（if and only if）$s > d-b$：

$$\begin{aligned} \frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d-b &\iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{两边乘以} 2\mu > 0) \\ &\iff b > \mu(2d-b) \\ &\iff \mu < \frac{b}{2d-b}, \end{aligned}$$

其中最后一步是除以 $2d-b$，因为 $d > b$，这是正数。每一步都可逆，所以这正是所要求的“当且仅当”。（若 $\mu$ 等于 $b/(2d-b)$，$P_1$ 刚好停在桌边，不会掉下。）

## 第二部分

现在 $\mu > b/(2d-b)$，所以 $P_1$ 会停在桌上。由 $P_2$ 第一次撞到地面的一刻起计时。在那一刻两个质点的速率都是 $V$。

**$P_1$：**由速率 $V$ 起以 $\mu g$ 减速，经过时间

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

后停下。

$P_2$：根据牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），它以速率 $eV$ 反弹。由于绳子松弛，它只在重力作用下自由运动，所以当 $eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 时它返回地面，即经过时间

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

（碰撞是瞬时的，所以第一次弹跳不耗时间。）

$P_1$ 在第二次弹跳之前停下，正正就是 $t_1 < t_2$ 的时候：

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

这里除以了 $V/g > 0$。所以若 $e > 1/(2\mu)$，$P_1$ 会在 $P_2$ 第二次弹跳之前停下，正如所求。事实上逆命题（converse）亦成立。

## 验算

- 极限情况：当 $\mu \to 0$ 时，界限 $b/(2d-b)$ 显然得到满足，而 $P_1$ 在光滑桌面上当然会滑出桌边。若 $b = d$，界限变成 1，所以在 $\mu < 1$ 之下它必定掉下；这是对的，因为 $P_2$ 着地时 $P_1$ 已在桌边，而且仍在运动。
- 由于 $\mu < 1$，第二个条件需要 $e > \frac{1}{2}$。地面几乎没有弹性时，弹跳很短，所以 $P_2$ 会先再次着地，与我们的预期一致。
- 数值上，取 $d = 2$、$b = 1$、$\mu = 0.5$ 和 $e = 0.8$（取 $g = 9.8$），逐步模拟运动得出 $t_1 \approx 0.452\,\mathrm{s}$ 和 $t_2 \approx 0.361\,\mathrm{s}$，与 $V/(\mu g)$ 和 $2eV/g$ 在 $V^2 = 4.9$ 时的值吻合。这里 $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$，所以 $P_2$ 先再次弹跳。在逐步模拟中对两个判别条件所作的随机测试，每一次结果都吻合。

## 常见错误

- 在第二阶段仍保留张力：$P_2$ 一着地，绳子便松弛，$P_1$ 只受摩擦力减速。
- 忘记 $P_1$ 已经移动了距离 $b$，把 $s$ 与 $d$ 比较，而不是与 $d-b$ 比较。
- 把系统的加速度写成 $g(1-\mu)$，忘记了 $mg(1-\mu)$ 这个力要令两个质量一起加速。

## STEP 之外

这里的绳子是一个单侧约束（unilateral constraint）：它只能拉，不能推，所以绳子一松弛，运动方程便会转换。支配方程在碰撞时或失去接触时改变的系统，称为分段光滑

（piecewise-smooth）系统或混合（hybrid）系统，在工程动力学和机械人学中都有深入的研究。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对绳子、摩擦和碰撞有仔细的论述，是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。