详细解答

STEP II 1992，第 12 题

力学 · 力矩与弹性绳

> **STEP II 1992，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q12

关键思路

每个轮子都可以自由转动，所以它处于平衡（equilibrium）的唯一条件，就是对轮心的力矩（moment）互相抵销：悬挂的质点（particle）要把轮子向一个方向转，而弹性绳（elastic string）则把它向另一个方向拉回去。由几何关系可以用 θ 表示弹性绳的伸长量（extension），于是由胡克定律（Hooke's law）得出张力（tension），再取力矩便得到一条关于 θ 的方程。因此，数算平衡位置的数目，就是数算这条方程在真正有意义的角度范围内有多少个解。

解答

建立模型

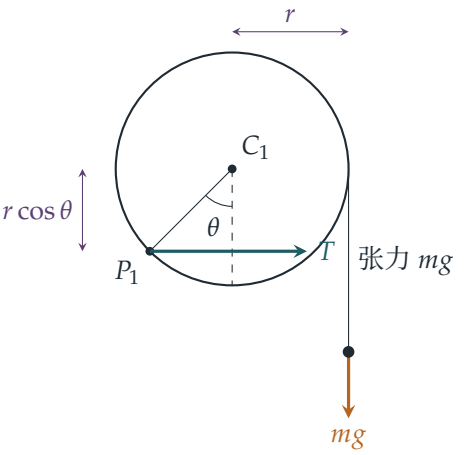
我们把各质点视为质点，把悬挂它们的绳视为轻（light）而不可伸长（inextensible）的绳，并把弹性绳视为轻而且服从胡克定律。轮轴是光滑（smooth）的，所以每个轮心处的反作用力对该轮心没有力矩。

取 C_1C_2 为水平。在图中，P_1 位于 C_1 外侧（左方）$r\sin\theta$ 处，并在其下方 $r\cos\theta$ 处；P_2 则是它的镜像。所以 P_1 和 P_2 处于同一高度，弹性绳是水平的，长度为

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

它的自然长度（natural length）是 d，所以伸长量是 $2r\sin\theta$，而根据胡克定律，张力为

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$



W_1 上的质点悬挂着并处于平衡，所以系着它的绳的张力是 mg；这条绳在较接近 W_2 的一侧沿切线方向离开轮子，与 C_1 的水平距离为 r。弹性绳以力 T 把 P_1 水平地拉向 W_2，而它的作用线在 C_1 下方 $r\cos\theta$ 处。

平衡条件

对 C_1 取力矩：重量使 W_1 顺时针转动（如图所示），力矩为 mgr；张力则使它逆时针转动，力矩为 $Tr\cos\theta$。所以

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}\,r\cos\theta = \frac{\lambda r^2\sin 2\theta}{d},$$

其中用了 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$。两边除以 λr^2，得

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

这正是所要证明的结果。根据对称性，对 C_2 取力矩也会得到同一条方程。

哪些角度是容许的?

? **想一想** 为甚么 θ 不可以是任意角度，使得 $\sin 2\theta = k$ 有无限多个解?

张力的力矩必须与重量的力矩方向相反。若 $\sin\theta \le 0$，则 P_1 与 P_2 两点相距不超过 d，于是弹性绳松弛，$T = 0$，没有东西可以抵销 mgr。若 $\cos\theta \le 0$，则弹性绳与 C_1 同高或在其上方，所以它对 C_1 的力矩是零，或者与重量一样使轮子向同一方向转动。无论哪种情况都不会有平衡。因此，平衡必须满足

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{即} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

（两个轮子可否处于不同的角度？张力对每个轮心的力矩，等于 T 乘以该轮心到直线 P_1P_2 的垂直距离，而两个力矩都必须等于 mgr。所以 C_1 和 C_2 与这条直线的距离相同，并且在直线的同一侧，而直线在两个轮心的下方。因此这条直线平行于 C_1C_2，所以 P_1 和 P_2 处于同一深度，两个角度亦相同，因为假如两个角度异号，弹性绳的长度便刚好是 d，因而松弛。所以每一个平衡位置都属于图中所示的对称类型。）

设 $k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$。在 $0 < 2\theta < \pi$ 上，$\sin 2\theta$ 由 0 上升，在 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 时达到 1，然后回落至 0，其间恰好两次取得 $(0, 1)$ 内的每一个值，并恰好一次取得 1 这个值。所以方程 $\sin 2\theta = k$

- 在 $k > 1$ 时无解；
- 在 $k = 1$ 时恰有一个解 $\theta = \frac{\pi}{4}$；
- 在 $0 < k < 1$ 时恰有两个解 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$，其中 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$。

由于 $k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$，答案如下：

第 (i) 部分

当 $\lambda < \dfrac{mgd}{r}$ 时没有平衡位置：弹性绳太弱，在任何角度都无法拉住质点。

第 (ii) 部分

当 $\lambda = \dfrac{mgd}{r}$ 时只有一个平衡位置，此时 $\theta = \frac{\pi}{4}$。

第 (iii) 部分

当 $\lambda > \dfrac{mgd}{r}$ 时恰有两个平衡位置，分别在 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$。

第 (iv) 部分

没有任何 λ 的值可以给出多于两个平衡位置，因为 θ 被限制在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内。

验算

- 量纲：λ 是力，mg 也是力，而 d/r 是两个长度之比，所以 $mgd/(\lambda r)$ 是无量纲的，正弦值理应如此。
- 极限情况：当 $\lambda \to \infty$ 时，弹性绳变得不可伸长，两个解分别趋向 $\theta \to 0$（伸长量极小，张力很大）和 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（弹性绳几乎与轮心同高，所以力臂极小）。两者都合理。

- 数值验算：取 $m = 1$、$d = 4$、$r = 1$、$g = 9.8$ 和 $\lambda = 3mgd/r$，于是 $k = \frac{1}{3}$；一个包含两个轮子的完整模型（容许两个角度不同）恰有两个平衡位置，分别在 $\theta \approx 0.1699$ 和 $\theta \approx 1.4009$；它们就是 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 减去这个值。

常见错误

- 把伸长量当作 $r\sin\theta$ 而不是 $2r\sin\theta$：弹性绳的两端都向外移动了。
- 以 $r\sin\theta$ 作为张力的力臂。张力是水平的，所以它的力臂是垂直距离 $r\cos\theta$。
- 在 (iv) 中答“无限多个”，忘记了只有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 在物理上才有可能。

STEP 之外

研究平衡位置的数目如何随参数改变而变化，正是分岔理论（*bifurcation theory*）的起点。在这里，$\lambda > mgd/r$ 时的两个平衡位置在 $\lambda = mgd/r$ 时合而为一，然后消失，这称为鞍结分岔（saddle-node bifurcation），又称折叠分岔（fold bifurcation）。考察势能（potential energy）便会发现，这一对平衡位置中一个是稳定的，另一个是不稳定的，这正是折叠分岔的典型特征。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 讲述了力矩、刚体平衡，以及如何由势能判断稳定性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。