详细解答

STEP II 1992，第 11 题

力学 • 抛体运动

> **STEP II 1992，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

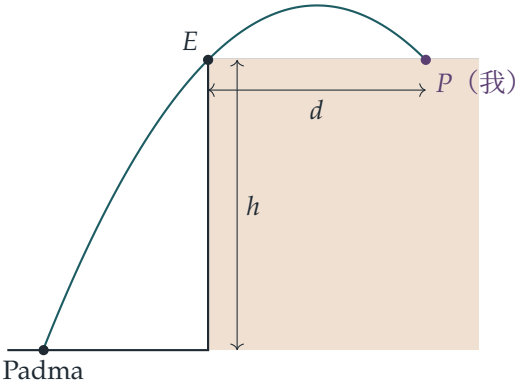
关键思路

这一掷的难处不在于把银包抛到高度 h，而在于让它越过崖顶：由崖边到我所站之处，水平距离至少为 d，银包在这一整段路程中的高度都不得低于 h。因此，我们只考虑银包首次到达高度 h 那一刻之后的运动。由那一刻起，它就是一个在水平地面（即崖顶所在的水平面）上的普通抛体（projectile），其速率可由能量守恒（conservation of energy）求得，余下的工作交给大家熟悉的最大射程（maximum range）u^2/g 便可。

解答

模型

把银包视为一个只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力，并设它由地面抛出（Padma 的身高可忽略不计）。设 E 为悬崖的顶边，P 为我所站的位置，因此 P 的高度为 h，并在 E 之后水平距离 d 处。崖面是铅垂的，而沙滩在崖面的另一侧，与我分处两边，所以无论 Padma 站在哪里，银包都必须越过 E（最差的情况是刚好擦过它），然后落到 P。



以下会反复用到一个事实。若一个质点在某一水平面上的速率为 u，运动方向与水平线成仰角 α，则它经过时间 $2u\sin\alpha/g$ 后回到该水平面，其间的水平位移为

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\le\frac{u^2}{g},$$

等号成立当且仅当 $\alpha=45°$。

条件是必要的

假设某一掷能把银包送到 P。银包必定到达高度 h，设 Q 为轨迹上首个高度为 h 的点。取崖脚为势能（potential energy）的零点，由能量守恒可得银包在 Q 的速率 u：

$$u^2=V^2-2gh.$$

想一想 为甚么 Q 与 P 的水平距离必定至少为 d?

当银包的水平位置与崖面相同时，它的高度必须至少为 h，否则便会撞上崖面（或在崖边之下经过）。它的高度由 0 开始连续上升，所以在此之前它已经到达高度 h：Q 位于 E 靠沙滩的一侧，或就在 E。由于 P 在 E 之后水平距离 d 处，Q 到 P 的水平距离至少为 d。

在 Q 与 P 之间，银包以速率 u 出发，由高度 h 回到高度 h。根据上述关于射程的事实，它所走过的水平距离至多为 u^2/g。因此

$$d\le\frac{u^2}{g}=\frac{V^2-2gh}{g},\qquad\text{即}\qquad V^2\ge g(2h+d).$$

条件是充分的

现在假设 $V^2\ge g(2h+d)$。则 $u^2=V^2-2gh\ge gd>0$，所以 $gd/u^2\le 1$，于是可以选取一个角 α，满足 $0<\alpha\le 45°$ 及

$$\sin 2\alpha=\frac{gd}{u^2}.$$

考虑这样一条抛物线（parabola）轨迹：它以速率 u 经过 E，以仰角 α 朝远离沙滩的方向运动。根据关于射程的事实，它在 E 之后水平距离 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$ 处回落到高度 h，那正是 P。在 E 与 P 之间，它高于高度 h，所以能越过崖顶。

把这条轨迹由 E 起在时间上倒推回去：在较早的时刻，银包的位置较低，而且在沙滩上方离崖面较远（当时它的铅垂速度较大，而且向上），所以轨迹会在沙滩上某一点与地面相交，该点与崖脚的水平距离为正数。在到达 E 之前，轨迹完全位于崖面靠沙滩的一侧，所以途中没有任何阻碍；又因为沙滩宽阔，Padma 可以站在该点。由能量守恒，银包在该点的速率为 $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$。因此，若 Padma 在该点以速率 V 沿轨迹的方向抛出银包，银包便会沿着这条轨迹到达我手上。

（当 $V^2 = g(2h + d)$ 恰好成立时，$\alpha = 45°$，银包刚好擦过崖边 E；若 V 更大，则在 $(0°, 90°)$ 内有两个角可行，而且两者都令银包严格地在崖边上方经过。）

综合以上两部分，Padma 能把银包抛给我，当且仅当 $V^2 \geq g(2h + d)$，这正是所要证明的。

验算

- 若 $d = 0$，条件变成 $V^2 \geq 2gh$，这正是铅垂上抛到达高度 h 所需的条件。
- 若 $h = 0$，条件变成 $V^2 \geq gd$，即水平地面上常见的最大射程。
- 若不理会崖边，Padma 最有利的做法是站在崖脚，而所有轨迹的包络抛物线（bounding parabola）只给出 $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$；由于 $\sqrt{h^2 + d^2} \leq h + d$，这个条件较弱。所以崖边确实是起决定作用的约束。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$h = 20$ 及 $d = 15$，临界速率为 $\sqrt{539} \approx 23.2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$；Padma 站在离崖脚约 11.4 m 处，而对这一掷进行逐步模拟，银包落在崖边之后 15.0 m 处，并擦过 E。对随机选取的 h、V 扫描所有抛射角，结果证实轨迹上两个高度为 h 的点之间的最大水平间距为 $(V^2 - 2gh)/g$。

常见错误

- 只对由崖脚抛往点 P 的情况使用包络抛物线。这样做忽略了崖边，所得的条件是必要但不充分的。
- 只证明一个方向。“若”的方向需要明确构造出一掷，并检查它由沙滩出发，而且不会撞上悬崖。

STEP 之外

在高度 h 重新开始考虑运动这一招之所以可行，是因为运动方程（equations of motion）不随时间改变，在水平平移下亦保持不变，所以轨迹上任何一点都可以当作一次全新的抛射。“哪些目标可以到达?” 这类问题，讨论的是一族曲线的包络线（envelope）；若途中有障碍物，答案便取决于哪一个约束最先生效，这个想法在最优化（optimisation）和变分法（calculus of variations）中会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）是进一步学习抛体运动和能量方法的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。