详细解答

STEP II 1992，第 10 题

纯数学 • 阿根图上的轨迹

> **STEP II 1992，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q10

关键思路

把式子写成 $\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$：它的辐角（argument）就是由方向 $z \to 0$ 逆时针转到方向 $z \to 1$ 的角。因此，固定辐角就等于固定由 0 到 1 的线段在 z 处所对的角，接下来便可交给圆的定理（circle theorems）处理（同弓形内的圆周角相等、圆内接四边形对角互补）。最后一部分用的是同一个想法，只是把由 0 到 1 的线段换成弦 z_4z_2。

解答

（题目的叙述有一处误植：条件应为 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$。）

整个解答全靠两个事实。第一，由于 $\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$，这个辐角量度的是在 z 处由直线 $z0$ 逆时针转到直线 $z1$ 的角。第二，它告诉我们 z 位于实轴（real axis）的哪一侧：

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

所以 $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$ 当且仅当 $\operatorname{Im} z > 0$，而它落在 $(-\pi,0)$ 内当且仅当 $\operatorname{Im} z < 0$。实轴上的点给出的商是实数（辐角为 0 或 π），而 $z = 0, 1$ 则根本没有辐角。

第 (i) 部分

这里 $\operatorname{Im} z > 0$，而由 0 到 1 的线段在 z 处所对的角为 α。在实轴上方，使一条固定的弦（chord）对着固定角度的所有点，组成一条通过弦两端的圆弧（同弓形内的圆周角相等）。反过来，该弧上每一点看这条弦的角都是 α，而且因为该点位于弦的上方，这个角是逆时针方向转的，所以整条弧都属于所求的轨迹（locus）。

要确定这个圆：圆心角为 2α，所以长度为 1 的弦给出半径 $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$，而圆心位于 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上，高度为 $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$。轨迹就是圆

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

位于实轴上方的那段弧，但不包括端点 0 和 1。由于 $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$，这是优弧（major arc）。当 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 时，它就是以 0 到 1 为直径的上半圆（半圆上的圆周角）。

第 (ii) 部分

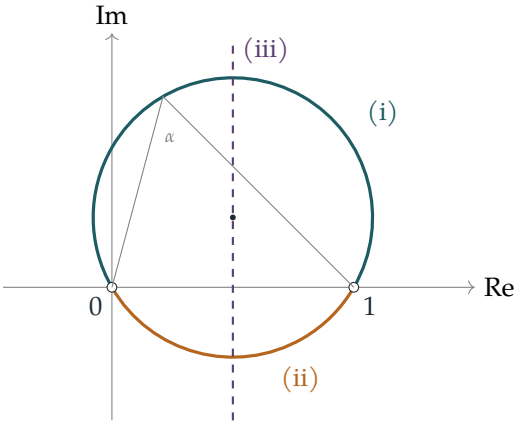
现在辐角 $\alpha - \pi$ 落在 $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ 内，所以 $\operatorname{Im} z < 0$，而弦在 z 处所对的角大小为 $\pi - \alpha$，方向为顺时针。

> **想一想** 在实轴下方，弦所对的角为 $\pi - \alpha$ 的是哪一个圆?

就是 (i) 中的同一个圆。若 P 在 (i) 的弧上，而 Q 在该圆的另一段弧上，则 $0PQ1$（按适当的次序排列）是一个圆内接四边形（cyclic quadrilateral），其中 P 与 Q 是对角，所以 P 和 Q 处的角之和为 π。因此，实轴下方的劣弧（minor arc）正正就是角为 $\pi - \alpha$ 的地方。轨迹是 (i) 中的圆位于实轴下方的那段弧，同样不包括 0 和 1。(i) 和 (ii) 两部分合起来，就是除去 0 和 1 之后的整个圆。（若 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$，(ii) 就是下半圆。）

第 (iii) 部分

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$ 即 $|z-1| = |z|$ 且 $z \neq 0$：z 与 0 和 1 等距。轨迹是垂直平分线（perpendicular bisector），即直线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$。



草图所示为 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 的情况：蓝绿色的优弧是 (i)，琥珀色的劣弧是 (ii)，紫红色的虚线是 (iii)，空心圆圈标示被剔除的点 0 和 1。

最后一部分

设 $f(z)=\dfrac{z-z_2}{z-z_4}$。由于 $(z_1-z_4)(z_3-z_2)=(z_4-z_1)(z_2-z_3)$，

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)}=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}=w,$$

所以 $\arg w=\arg f(z_1)-\arg f(z_3)$（模 2π）。

函数 f 其实就是 (i) 和 (ii) 两部分的那个函数，只是换了坐标。设 $z=z_4+(z_2-z_4)u$，这是先旋转（rotation）和放大（enlargement），再平移（translation），把 $u=0,1$ 分别送到 z_4,z_2。于是

$$f(z)=\frac{(z_2-z_4)(u-1)}{(z_2-z_4)u}=\frac{u-1}{u}.$$

通过这四点的圆，对应于 u 平面上一个通过 0 和 1 的圆。

> ? **想一想** 为甚么 z_1 和 z_3 位于不同的弧上?

这些点沿圆周依次为 z_1,z_2,z_3,z_4，所以弦 z_2z_4 把圆分成两段弧，一段包含 z_1，另一段包含 z_3。在 u 平面上，其中一段位于实轴上方，另一段位于实轴下方。

由 (i) 和 (ii) 可知，$\frac{u-1}{u}$ 的辐角在上方的弧上取常数值 $\beta\in(0,\pi)$，在下方的弧上取值 $\beta-\pi$。这里我们并没有假设 $\beta\le\frac12\pi$：上面运用圆的定理的论证从未用过这个限制。因此

$$\arg w=\arg f(z_1)-\arg f(z_3)=\pm\big(\beta-(\beta-\pi)\big)=\pm\pi\pmod{2\pi},$$

所以 w 是实数，而且其实是负数。 ■

验算

对于正方形 $z_1=1$、$z_2=\mathrm{i}$、$z_3=-1$、$z_4=-\mathrm{i}$，我们得到 $w=\dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=-1$，确实是负实数。至于 (i)，取 $\alpha=\frac12\pi$ 和 $z=\frac12+\frac12\mathrm{i}$。则 $\frac{z-1}{z}=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，其辐角为 $\frac12\pi$。我们亦以数值方法验证过：对若干个 α 的值，两段弧上的辐角确如上文所述；并且在随机的圆上依次随机取四点，共 10^4 组，w 都是负实数。

常见错误

- 把整个圆当作 (i) 的答案。只有一段弧的辐角是对的；另一段弧给出的是 $\alpha-\pi$，那正是第 (ii) 部分。
- 忘记剔除 0 和 1，在这两点辐角没有定义。

- 因为处理 $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ 中的负号时出错，而弄错 $\arg w$ 的正负号。像上面那样把它们配对，就可避免这个问题。

STEP 之外

w 这个量（除了正负号和次序上的差别外）就是四个点的交比（cross-ratio）。它在每一个莫比乌斯变换（Möbius transformation）$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ 之下都保持不变，而四点共圆或共线，当且仅当它们的交比是实数。由于莫比乌斯映射把圆和直线送到圆和直线，这就提供了一个证明四点共圆（concyclicity）的巧妙方法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种几何观点发挥得淋漓尽致。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。